PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 21/22. 1./15. November 1921. Redaktionsschluß für No. 23 am 25. November 1921. 22. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

W. Alexandrow, Die Elektrodynamik im schwachen Gravitationsfelde. S. 593.

E. Lehmann, Die Magnetisierbarkeit der Zink-Eisenlegierungen niederen Eisengehaltes. S. 601.

O. E. Frivold, Elektrostriktion in Gasen, nebst Bestimmung von elektrischen Momenten fertiger Dipole. S. 603.

Vorträge und Diskussionen des deutschen Physikertages in Jena vom 18.—24. September 1921:

R. Seeliger, Anregung der Atome zur Lichtemission durch Elektronenstoß. IV. Verhalten der einzelnen Glieder einer Serie. S. 610.

C. Ramsauer, Über den Wirkungsquerschnitt der Edelgase gegenüber langsamen Elektronen. S. 613.

R. Bär, Über die scheinbaren Unterschreitungen des elektrischen Elementarquantums. S. 615.

G. Borelius, Die thermoelektrischen Temperaturfunktionen. S. 618.

E. Kretschmann, Zur Theorie der elektrischen Leitung und der Wärmestrahlung. S. 620.

P. Lertes, Der Dipolrotationseffekt bei dielektrischen Flüssigkeiten. S. 621.

A. Wigand, Der vertikale Leitungsstrom in der Atmosphäre und die Erhaltung des elektrostatischen Erdfeldes. S. 623.

R. Fürth, Das Auftreten systematischer Fehler bei numerischer Auswertung physikalisch-statistischer Aufgaben. S. 625.

Ph. Frank, Über Entstehung von Periodizitäten durch Zufall. S. 628.

A. Byk, Das Theorem der übereinstimmenden Zustände und die Quantentheorie der Gase und Flüssigkeiten. S. 630.

L. Schames, Allgemeine Verbesserung der Zustandsgleichung; spezielle Zustandsgleichung für Wasserstoff. S. 630.

E. Reichenbächer, Massenunabhängige Schwere-Felder in der allgemeinen Relativitätstheorie. S. 634.

H. Fricke, Ein neuer Weg zur Aufklärung des Äther- und Schwerkraftproblems. S. 636.

Besprechungen:

H. Schmidt, Probleme der modernen Chemie. S. 640.

Vorlesungsverzeichnis für das Wintersemester 1921/22. S. 640.

Personalien. S. 640.

Angebote. S. 640.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die Elektrodynamik im schwachen Gravitationsfelde.

Von W. Alexandrow.

In einer vorhergehenden Arbeit[1]) ist vom Verf. die Elektrostatik im schwachen nichtstatischer Gravitationsfelde allgemein untersucht und auf einige wirkliche und „spezielle“ Gravitationsfelder angewendet worden. In der vorliegenden Arbeit soll nun das allgemeinste Problem der Elektrodynamik in einem schwachen Gravitationsfelde behandelt werden. In Vektorform umgeschrieben, erhalten die elektrodynamischen Feldgleichungen im schwachen Gravitationsfelde eine besonders durchsichtige und bemerkenswerte Gestalt, welche die in der vorhergehenden Arbeit eingeführten Ströme als „Polarisations“- und „Magnetisierungsströme“ (im Sinne von H. A. Lorentz) im gravitationsfreien Raum erscheinen läßt. Die Ergebnisse sollten dann insbesondere auf die Ausbreitung der ebenen elektromagnetischen Wellen auf einem im Galileischen Raum rotierenden Bezugssystem und im Gravitationsfelde einer rotierenden Massenkugel angewendet werden. Es sei jedoch die Lösung dieser rein mathematischen Aufgabe einer späteren Mitteilung vorbehalten. Hier soll nur eine Bemerkung über den Fall des statischen Gravitationsfeldes Platz finden. Es ergibt sich in diesem Falle die rein elektrodynamische Ableitung der Einsteinschen Strahlenablenkung.

1) W. Alexandrow, Ann. d. Phys. **65**, 675, 1921.

Dies liefert folgende physikalische Auffassung der „Strahlenkrümmung“ im Gravitationsfelde:

der leere Raum („Äther“) ist nicht nur des Faraday-Maxwellschen Spannungszustandes fähig (wie im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie), sondern auch der Polarisation und der Magnetisierung (das Ergebnis der Gravitationstheorie auf dem Boden der allgemeinen Relativität!). Als elektrischer bzw. magnetischer Suszeptibilitätsfaktor tritt dabei im wesentlichen das Newtonsche Gravitationspotential auf.

Zunächst seien hier die Resultate der erwähnten Arbeit, an die die weitere Entwicklung anknüpft, in vereinfachter Form zusammengestellt und durch einige Nachträge ergänzt.

§ 1. Nachträge.

Ist in einem beliebigen schwachen Gravitationsfelde die Verteilung der ruhenden Ladung durch die Ladungsdichte $s^0 = \varrho$ gegeben und bestimmt man das gewöhnliche elektrostatische Feld aus dem Potential

$$\varphi = \int \frac{\varrho dV}{r}$$

durch

$$E^i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad E_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i};$$

führt man ferner, in Rücksicht auf die Analogie zu „speziellen“ Gravitationsfeldern ein:

die „Geschwindigkeit“

$$u^i = -g^{0i}, \quad u_i = g^{0i},$$

den „Verzerrungstensor“

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g^{i0}}{\partial x_k} + \frac{\partial g^{k0}}{\partial x_i}\right)$$

und die „Leistung“

$$L = -(\mathfrak{E}^k u_k)$$

und außerdem die Bezeichnung

$$\Phi = 1 + \sqrt{g g^{00} g^{11}},$$

so lauten die Maxwellschen Gleichungen (f_{ik} ist das Feld):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f^{0\alpha}}{\partial x_\alpha} = s^0 = \varrho(1+\Phi) + \mathfrak{E}^k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}, \\ &\frac{\partial f^{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = s^i = \varrho u^i + (2\mathfrak{E}^k u^i_k - \mathfrak{E}^i u^k_k) - \\ &- \frac{\partial L}{\partial x_i} - \mathfrak{E}^i \frac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, 3)^1). \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I}_{1,2})$$

(Die Summation nach griechischen Buchstaben durchläuft die Werte 0, 1, 2, 3; die nach den lateinischen die Werte 1, 2, 3.) Die Elektrostatik im schwachen Gravitationsfelde läßt sich also als eine Elektrodynamik im gravitationslosen Raum auffassen. Die Ladungsdichte ϱ erhält Zusatzglieder, die schon im statischen Gravitationsfelde auftreten. Ganz neu erscheint dagegen der „Strom“ s^i, der nur im nicht-statischen (stationären oder veränderlichen) Gravitationsfelde hervorgerufen wird. Seine Bestandteile wurden, in Rücksicht auf die Analogie zu den „speziellen“ Gravitationsfeldern, in der erwähnten Arbeit der Reihe nach als „Konvektionsstrom“, „Verzerrungsstrom“, „Leistungsstrom“ und „masseninduzierter Strom“ bezeichnet. Der erste tritt nur dort auf, wo die Ladung sitzt; die drei letzten Bestandteile sind dagegen „Ätherströme“, wie der Maxwellsche Verschiebungsstrom. Der Gesamtstrom genügt, wie man durch direkte Rechnung verifizieren kann, der Kontinuitätsgleichung. Als einige Folgerungen dieser Gleichungen seien erwähnt:

1. In einem veränderlichen Gravitationsfelde (speziell im Felde eines punktförmigen Senders der Gravitationswellen) strahlt im allgemeinen auch die ruhende Elektrizität. Es sei hier dieser Punkt etwas näher erörtert. Da im Falle des Gravitationspunktsenders hauptsächlich auf den „Konvektionsstrom“ geachtet wurde und die Bilanz der „Ätherströme“ nicht vollständig war, konnte man denken, daß immer, wie es in dem von G. Mie[1]) untersuchten Falle des um ein Elektron umlaufenden Massenkernes zutrifft, eine im Raume stehende elektromagnetische Welle und keine eigentliche Strahlung entsteht. Es sollen deshalb einige Gegenbeispiele gegeben werden.

Nehmen wir ein im Galileischen Raum um die x_3-Achse hin und her schwingendes (pendelndes) Bezugssystem, so daß die Winkelgeschwindigkeit etwa $\omega \sin \nu t$ beträgt ($\omega = \text{const}$). Das Induktionsglied verschwindet allgemein für „spezielle“ Gravitationsfelder. Hier ist aber auch der Verzerrungstensor identisch $= 0$. Wir betrachten nun eine ruhende, homogen geladene Kugel auf dem beschriebenen System. Dann ist:

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{3}\varrho r \mathfrak{r}_1 \text{ innerhalb und}$$

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{4\pi r^2}\mathfrak{r}_1 \text{ außerhalb der Kugel.}$$

Es ist aber $(\mathfrak{u}\mathfrak{r}_1) = 0$, so daß die „Leistung“ $(\mathfrak{E}\mathfrak{u}) = 0$ ist. Es bleibt also nur der „Konvektionsstrom“ und die Maxwellschen Gleichungen lauten:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f^{0\alpha}}{\partial x_\alpha} = \varrho, \\ &\frac{\partial f^{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = \varrho u^i \qquad (i = 1, 2, 3), \end{aligned}\right\}$$

wo ϱu^i vom Betrage $\varrho \bar{r} \omega \sin \nu t$ ($\bar{r}^2 = x_1^2 + x_2^2$) die Richtung des Pendelns hat. Hier muß die ruhende geladene Kugel offenbar strahlen.

Betrachten wir noch ein im Galileischen Raum schwingendes Bezugssystem und eine ruhende homogen geladene Kugel vom Radius a in diesem. Der Verzerrungstensor verschwindet, da $\mathfrak{u} = \mathfrak{a} \sin \nu t$ ($\mathfrak{a} = \text{const}$) räumlich konstant ist. Die „Leistung“ $L = (\mathfrak{E}\mathfrak{u})$ ist:

$$L = \tfrac{1}{3}\varrho r (\mathfrak{r}_1 \mathfrak{u}) \quad \text{innerhalb,}$$

$$= \frac{e}{4\pi r^2}(\mathfrak{r}_1 \mathfrak{u}) \quad \text{außerhalb der Kugel;}$$

der „Leitungsstrom“:

$$-\operatorname{grad} L = -\tfrac{1}{3}\varrho \mathfrak{u} \quad \text{innen,}$$

$$= \left(\frac{a}{r}\right)^3 \left(-\tfrac{1}{3}\varrho \mathfrak{u} + \varrho (\mathfrak{r}_1 \mathfrak{u}) \mathfrak{r}_1\right) \quad \text{außen.}$$

Nimmt man noch den „Konvektionsstrom“ hinzu, so tritt als der „Strom“ auf:

$$\left.\begin{aligned} &\text{innerhalb der Kugel} \\ &\tfrac{2}{3}\varrho \mathfrak{u} \\ &\text{außerhalb der Kugel} \\ &\left(\frac{a}{r}\right)^3 \left(-\tfrac{1}{3}\varrho \mathfrak{u} + \varrho (\mathfrak{u}\mathfrak{r}_1)\mathfrak{r}_1\right) \end{aligned}\right\} \mathfrak{u} = \mathfrak{a} \sin \nu t.$$

1) Dabei wurde, lediglich zur Vereinfachung der Rechnung, die in vielen Anwendungsfällen zutreffende Annahme gemacht; $g^{11} = g^{22} = g^{33}$, $g^{ik} = 0$ ($i, k = 1, 2, 3$; $i \neq k$), die übrigens nur unwesentliche Modifikationen der Formeln bedingt.

1) Diese Zeitschr. **21**, 651, 1920.

Man hat also folgendes Bild:

Innerhalb der Kugel ist vom gewöhnlichen Konvektionsstrom $\frac{3}{4}$ zu nehmen. In einer gewissen „Atmosphäre" um die Kugel ist der Strom — wie wenn von der Dichte ϱ herrührend — entgegengesetzt, aber nur vom Betrage $< \frac{1}{3}$ des Konvektionsstromes. Außerdem schwingt noch die „Atmosphäre" radial mit der Geschwindigkeit = Projektion von u auf r, als ob sie dabei die Dichte $\left(\frac{a}{r}\right)^3 \varrho < \varrho$ besäße. Auch in diesem Falle ist wohl die Welle nicht stehend.

2. Rotiert eine Massenkugel vom Radius l und „Gravitationsradius" m innerhalb eines elektrisch geladenen Ringes, so ist dieser mit einem Magnetfeld umgeben, als wenn der Ring entgegengesetzt um die Kugel rotieren würde, und zwar so, daß der „Strom" (in hinreichender Entfernung r von der Kugel, in der Äquatorebene)

$$\frac{4}{5} \varrho m \omega \left(\frac{l}{r}\right)^2$$

beträgt. Dieser Strom ist infolge des Faktors m (statt der gewöhnlichen Länge) ein $\frac{1}{c^2}$ Bruchteil des gewöhnlichen Konvektionsstromes und deshalb für die irdischen Verhältnisse wohl verschwindend. (In der vorliegenden Arbeit wird ein etwas günstigerer Effekt abgeleitet.)

3. Ein rotierender geladener Ring ist auch für den mitbewegten Beobachter mit einem Magnetfeld umgeben.

Dabei treten noch „Ätherströme" auf, die durch die Kontinuität des Stromes bedingt sind.

Es sei hier noch der Fall einer rotierenden hohlen Massenkugel vom Radius a und dem Gravitationsradius m hinzugefügt[1]). Ein innerhalb einer solchen Kugel (in der Nähe des Mittelpunktes, im Abstand r, in der Äquatorebene) sich befindender elektrisch geladener Ring stellt einen Strom vom Betrage

$$\frac{4}{3} \varrho m \omega \frac{r}{a}$$

dar, der entgegengesetzt der Kugelrotation gerichtet ist.

§ 2. Das elektromagnetische Feld des stationären Leitungsstromes im schwachen Gravitationsfelde.

1. Der Übergang von der Elektrostatik zur Elektrodynamik gestaltet sich besonders übersichtlich, wenn man zunächst das zweite stationäre Grundproblem, das der stationären Ströme, erledigt. Wir gehen also von den Maxwellschen Gleichungen im beliebigen Gravitationsfelde aus ($\mathfrak{f}^{ik}$ Felddichte, $\mathfrak{s}^i$ Stromdichte, φ_i Potentiale):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{f}^{ik}}{\partial x_k} &= \mathfrak{s}^i, \\ f_{ik} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}, \end{aligned}\right| \quad (1)$$

und nehmen an, daß der Strom nur als reiner Leitungsstrom auftritt, so daß keine statischen Ladungen vorhanden sind, also

$$\mathfrak{s}^0 = \varrho = 0.$$

Für die Komponenten der Leitungsstromdichte, die von der Zeit unabhängig sind, führen wir die Bezeichnung

$$\mathfrak{s}^i = J^i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ein. Sie genügt der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial J^i}{\partial x_i} = 0.$$

Das nach der gewöhnlichen Maxwellschen Theorie bei aufgehobener Gravitation aus J^i durch das Vektorpotential

$$\psi^i = \int \frac{J^i dV}{r}$$

auf Grund

$$H_{ik} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

bestimmte stationäre Magnetfeld sei mit H_{ik} bezeichnet.

Wir setzen nun das Gravitationsfeld als schwach voraus, d. h.

$$g_{ik} = \overset{0}{g}_{ik} + \varepsilon \gamma_{ik},$$

wo $\overset{0}{g}_{ik}$ die Koeffizienten der metrischen Fundamentalform der speziellen Relativitätstheorie sind und ε eine kleine Zahl ist, wobei wir nur die Glieder der ersten (und nullten) Ordnung in ε berücksichtigen. (Wir machen also genau das, was man mit den Gravitationsgleichungen macht, um zur Einsteinschen Näherungslösung zu gelangen.) Zur Vereinfachung der Rechnung nehmen wir das Gravitationsfeld als so beschaffen an, daß

$$g^{11} = g^{22} = g^{33}, \quad g^{ik} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3; \; i \neq k) \quad (2)$$

ist. Diese Bedingung ist bei vielen Anwendungen erfüllt, und darüber hinaus ist bei der Behandlung der Elektrostatik gezeigt worden, daß alle wesentlichen Züge schon bei dieser Annahme zum Vorschein kommen, indem im allgemeinen Falle nur unwesentliche Modifikationen hinzutreten.

[1]) Das Gravitationsfeld einer solchen Kugel ist von H. Thirring (diese Zeitschr. **19**, 33—39, 1918 und **22**, 29—30, 1921) berechnet worden. Es ist hier zwar die früher erwähnte Voraussetzung nicht erfüllt, dadurch wird aber keine Modifikation bedingt.

Über die Größenordnungen der verschiedenen Komponenten wäre noch zu sagen, daß

$$g^{0i}\,(i = 1, 2, 3)$$

von der Größenordnung ε sind; andere Gravitationsglieder aber von der Form $+1+\varepsilon(\cdots)$, so daß ihre Ableitungen wieder von der Größenordnung ε sind. Von den elektromagnetischen Potentialen ist φ_0 und seine Ableitungen hier von der Größenordnung ε; dagegen $\varphi_i\,(i = 1, 2, 3)$ von der Form $\varphi_i + \varepsilon(\ldots)$, so daß $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_0}$ und f_{0i} die Größenordnung ε haben; f_{ik} sind von der Form $H_{ik} + \varepsilon(\cdots)$.

2. In den Maxwellschen Gleichungen

$$\frac{\partial\,(\sqrt{g}\,g^{i\alpha}g^{k\beta}f_{\alpha\beta})}{\partial x_k} = s^i$$

spalten wir, um die Glieder der 0ten und 1. Ordnung in ε auszuwählen, den Index 0 ab und schreiben sie so, daß die Indizes bei den Summationen nach k, α, die überall vollzogen sein müssen, nur die Werte 1, 2, 3 durchlaufen. Läßt man die Glieder höherer Ordnung fort, so bleibt in der nullten Gleichung:

$$\frac{\partial\,(\sqrt{g}\,g^{00}g^{11}f_{0k})}{\partial x_k} + \frac{\partial\,(\sqrt{g}\,g^{0\alpha}g^{11}f_{\alpha k})}{\partial x_k} = 0$$

übrig. Da f_{0k} und $g^{0\alpha}$ von der Größenordnung ε sind, kann man die Faktoren $\sqrt{g}\,g^{00}g^{11}$, $\sqrt{g}\,g^{11}$ durch -1 ersetzen. Deuten wir nun die Summationen nach 0, 1, 2, 3 mit griechischen, die nach 1, 2, 3 mit lateinischen Buchstaben an, so ist:

$$\frac{\partial f^{0\alpha}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial\,(f^{ik}u_i)}{\partial x_k} = \frac{\partial f^{ik}}{\partial x_k}u_i + f^{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}.$$

Hier ist u_i von der Größenordnung ε; also darf im zweiten Gliede f^{ik} durch H^{ik} ersetzt werden; im ersten Gliede aber $\frac{\partial f^{ik}}{\partial x_k}$ durch $\frac{\partial f^{i\alpha}}{\partial x_\alpha}$, was — wie wir sogleich sehen werden — bis auf einen Unterschied von der Größenordnung ε gleich J^i ist. Das letzte Glied formen wir noch so um:

$$H^{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = H^{ik}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right).$$

Führen wir noch analog der „Rotation“

$$v_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \qquad (3)$$

ein, so lautet die nullte Gleichung endgültig:

$$\frac{\partial f^{0\alpha}}{\partial x_\alpha} = s^0 = (J_k u^k) + (H^{ik}v_{ik}). \qquad (\mathrm{II}_1)$$

3. Ebenso behandeln wir auch die Gleichungen $i = 1, 2, 3$.

Beachten wir, daß f_{oi} die Größenordnung ε hat, so haben wir zunächst nur folgende Glieder zu behalten (bei den Summationen nach k, β durchlaufen die Indizes nur die Werte 1, 2, 3):

$$\frac{\partial\,(\sqrt{g}\,g^{00}g^{11}f_{i0})}{\partial x_0} + \frac{\partial\,[\sqrt{g}\,(g^{11})^2 f_{ik}]}{\partial x_k} + \frac{\partial\,(\sqrt{g}\,g^{11}g^{0\beta}f_{i\beta})}{\partial x_0} = J^i.$$

Da f_{i0}, $g^{0\beta}$ von der Größenordnung ε sind, kann man wieder die Faktoren $\sqrt{g}\,g^{00}g^{11}$, $\sqrt{g}\,g^{11}f_{i\beta}$ durch -1 bzw. $-H_{i\beta}$ ersetzen:

$$\frac{\partial f^{i0}}{\partial x_0} + \sqrt{g}\,(g^{11})^2\frac{\partial f^{ik}}{\partial x_k} + f^{ik}\frac{\partial\,[\sqrt{g}\,(g^{11})^2]}{\partial x_k} - H^{ik}\frac{\partial u_k}{\partial t} = J^i.$$

Da ferner der Differentialkoeffizient im dritten Glied von der Größenordnung ε ist, kann man dort f^{ik} durch H^{ik} ersetzen; die ersten zwei Glieder aber, analog 2., durch

$$\frac{\partial f^{i\alpha}}{\partial x_\alpha} - (1 - \sqrt{g}\,(g^{11})^2)J^i.$$

Führen wir noch die Bezeichnung

$$\Psi = 1 - \sqrt{g}\,(g^{11})^2 \qquad (4)$$

ein, so lauten die Gleichungen $i = 1, 2, 3$

$$\frac{\partial f^{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = s^i = J^i(1+\Psi) + H^{ik}\frac{\partial \Psi}{\partial x_k} + H^{ik}\frac{\partial u_k}{\partial t} \qquad (\mathrm{II}_2)$$

(α durchläuft die Werte 0, 1, 2, 3; lateinische Indizes — 1, 2, 3).

4. Man kann sich durch Rechnung überzeugen, daß der in den Gleichungen $(\mathrm{II}_{1,2})$ rechts auftretende Viererstrom s^i der Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial s^\alpha}{\partial x_\alpha} = 0$ genügt. In (II_1) ist ganz neu eine statische Ladungsdichte erschienen. Vergleicht man die Gleichungen (II) mit (I), so würde man die beiden Bestandteile der Ladungsdichte in (II_1):

$$(J_k u^k)$$

als „Konvektionsladung“ und

$$(H^{ik}v_{ik})$$

als „Rotationsladung“ bezeichnen. Die erste ist nur dort vorhanden, wo der Strom J^i fließt, die zweite dagegen auch im „Äther“. Wir sehen, daß die „Rotation“ ebenso zum Magnetfeld gehört, wie der „Verzerrungstensor“ zum elektrischen Felde. Das „Leistungsglied“ fehlt hier, da es keine magnetische „Leistung“ gibt. Die gravitationsstatischen Glieder in (II_2) sind ganz analog denen in (I_1). Ebenso entspricht das „Induktionsglied“

$$H^{ik}\frac{\partial u_k}{\partial t}$$

dem $-\mathsf{E}^i\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ in (I_2), wobei u_k zu H^{ik} so gehört, wie Φ zu E^i.

5. Wir wenden zunächst diese Gleichungen an auf den eine rotierende Massenkugel umfließenden stationären Strom. Das Gravitationsfeld einer solchen Kugel ist von J. Lense und H. Thirring[1]) berechnet worden.

Ist $$\varepsilon = \tfrac{4}{5} m l^2 \omega$$
(l Radius, m „Gravitationsradius", ω Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Kugel), so ist hier

$$u^1 = -g^{01} = \varepsilon \frac{x_2}{r^3}, \quad u^2 = -g^{02} = -\varepsilon \frac{x_1}{r^3}, \quad u^3 = 0.$$

Die „Konvektionsladung" beträgt also

$$\frac{\varepsilon}{r^2}\left(J_1 \frac{x_2}{r} - J_2 \frac{x_1}{r}\right) = \frac{4}{5} m\omega \left(\frac{l}{r}\right)^2 [\mathfrak{r}_1 \mathfrak{J}]_z$$

($\mathfrak{J}$ der Strom $[J_1, J_2, J_3]$, $\mathfrak{r}_1$ Einheitsvektor). Umfließt der Strom die rotierende Kugel in der Äquatorebene, so ist (beim kreisförmigen Strom):

$$J_1 = J\frac{x_2}{r} = -J^1, \quad J_2 = -J\frac{x_1}{r} = -J^2,$$

wo $J \gtrless 0$ ist, je nachdem der Strom im Sinne der Kugelrotation oder ihr entgegengesetzt fließt. Die „Konvektionsladung" ist dann

$$\frac{4}{5} J m \omega \left(\frac{l}{r}\right)^2.$$

Die Rotation einer Massenkugel innerhalb eines Kreisstromes bedingt also das Entstehen einer statischen Ladung von dieser Größe; sie ist positiv, wenn die Kugel im Sinne des Stromes rotiert. Dieser Effekt ist etwas günstiger als der entsprechende Stromeffekt (§ 1) infolge der großen Elektronengeschwindigkeit, die in J steckt. Für die „Rotationsladung" würde man den Wert

$$\frac{\varepsilon}{r^3}\left(H^z - 3\frac{z}{r} H^r\right)$$

erhalten (H^z die z-Komponente, H^r die Radialkomponente des Magnetfeldes; $H^1 = H_{23}$, $H^2 = H_{31}$, $H^3 = H_{12}$).

6. Auf einem relativ zu einem Galileischen Bezugsraum um die $x_3 = z$-Achse rotierenden System ist

$$u^1 = -\omega x_2, \quad u^2 = \omega x_1, \quad u^3 = 0,$$

also die „Konvektionsladung"

$$r\omega\left(J_2 \frac{x_1}{r} - J_1 \frac{x_2}{r}\right) = r\omega [\mathfrak{J}, \mathfrak{r}_1]_z.$$

Fließt der Strom in einer zur Rotationsachse senkrechten Ebene, so ist (bei Kreisform):

$$J_1 = J\frac{x_2}{r} = -J^1, \quad J_2 = -J\frac{x_1}{r} = -J^2,$$

wo $J \gtrless 0$ ist, je nachdem er im Sinne der Rotation oder entgegengesetzt fließt; und die „Konvektionsladung" wird

$$-Jr\omega;$$

sie ist positiv, wenn der Strom entgegengesetzt der Rotation des Systems fließt. Die „Rotationsladung" ist

$$2\omega H^z.$$

§. 3. Das elektromagnetische Feld beliebiger Ströme und Ladungen im schwachen Gravitationsfelde.

1. Es ist nun nicht schwer, die allgemeinen Maxwellschen Gleichungen im schwachen Gravitationsfelde abzuleiten. Denn bis auf die „Induktionsglieder" elektromagnetischen Ursprungs hat man hier einfach die Zusammensetzung der beiden stationären Spezialfälle.

Wir bezeichnen das nach der gewöhnlichen Maxwellschen Theorie bei Aufhebung der Gravitation aus $\mathfrak{s}^i$ durch das Viererpotential

$$\psi^i = \int \frac{\mathfrak{s}^i dV}{r} \qquad (\mathfrak{s}^0 = \varrho; \ \mathfrak{s}^i = J^i, \ i = 1, 2, 3)$$

gemäß

$$F_{ik} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}$$

berechnete Feld mit F_{ik}. Es zerfällt in das elektrische Feld und das Magnetfeld:

$$\left.\begin{aligned} F^{0i} &= \mathsf{E}^i \\ F^{ik} &= H^{ik} \end{aligned}\right| \quad (i, k = 1, 2, 3). \qquad (1)$$

$$H^1 = H_{23}, \ H^2 = H_{31}, \ H^3 = H_{12}.$$

Während die Größenordnungen der Gravitationsglieder durch die früheren Festsetzungen charakterisiert werden, sind die elektromagnetischen Potentiale von der Form

$$\varphi_i = \psi_i + \varepsilon(\cdots);$$

für das Feld gilt $f_{ik} = F_{ik} + \varepsilon(\cdots)$.

2. Bei der nullten Gleichung haben wir zunächst wie vorhin

$$\frac{\partial(\sqrt{g}\, g^{0\alpha} g^{11} f_{0k})}{\partial x_k} + \frac{\partial(\sqrt{g}\, g^{0i} g^{11} f_{ik})}{\partial x_k} = \varrho.$$

Hier kann bei g^{0i} der Faktor $\sqrt{g}\, g^{11}$ durch -1 ersetzt werden. Ferner kann man schreiben:

$$\frac{\partial f^{0\alpha}}{\partial x_\alpha} = \varrho + \boldsymbol{\Phi}\frac{\partial f^{0\alpha}}{\partial x_\alpha} + f^{0k}\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x_k} + \frac{\partial (f^{ik} u_i)}{\partial x_k}.$$

Bei den mit ε schon behafteten Gliedern ist $\frac{\partial f^{0\alpha}}{\partial x_\alpha}$ durch ϱ, f^{0k} durch E^k zu ersetzen. Das letzte Glied berechnet sich wie vorhin. Nur ist hier $\frac{\partial f^{ik}}{\partial x_k}$ nicht durch J^i, sondern durch $J^i - \frac{\partial f^{i0}}{\partial x_0}$ oder $J^i + \frac{\partial \mathsf{E}^i}{\partial t}$ zu ersetzen. Man kommt

[1]) Diese Zeitschr. 19, 158, 1918.

so zu der endgültigen Form der nullten Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f^{0\alpha}}{\partial x_\alpha} = s_0 = \varrho\,(1+\Phi) + \mathsf{E}^k\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \\ + (J^k u_k) + (H^{ik}v_{ik}) \\ + \left(u^k\frac{\partial \mathsf{E}^k}{\partial t}\right)\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{III}_1)$$

(Summation nach griechischen Buchstaben über 0, 1, 2, 3, nach lateinischen — über 1, 2, 3).

3. Bei den Gleichungen $i = 1, 2, 3$ haben wir mehr Glieder zu berücksichtigen:

$$\frac{\partial\left(\sqrt{g}\,g^{11}g^{00}f_{i0}\right)}{\partial x_0} + \frac{\partial\left[\sqrt{g}\,(g^{11})^2 f_{ik}\right]}{\partial x_k} + \\ + \frac{\partial\left(\sqrt{g}\,g^{i0}g^{11}f_{0k}\right)}{\partial x_k} + \frac{\partial\left(\sqrt{g}\,g^{11}g^{0k}f_{i0}\right)}{\partial x_k} + \\ + \frac{\partial\left(\sqrt{g}\,g^{11}g^{0k}f_{ik}\right)}{\partial x_0} = J^i.$$

In den drei letzten Gliedern, die g^{i0} enthalten, oder auch sonst in den Gliedern, die mit ε behaftet sind, kann man den Faktor $\sqrt{g}\,g^{11}$ durch -1 ersetzen, außerdem eventuell f^{ik} durch H^{ik}, f^{0i} durch E^i. Es ergibt sich:

$$\frac{\partial f^{i\alpha}}{\partial x_\alpha} + \Phi\frac{\partial \mathsf{E}^i}{\partial t} + \mathsf{E}^i\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \Psi\frac{\partial f^{ik}}{\partial x_k} - H^{ik}\frac{\partial \Psi}{\partial x_k} - \\ - u^i\frac{\partial f^{0k}}{\partial x_k} - \mathsf{E}^k\frac{\partial u^i}{\partial x_k} - \frac{\partial\left(u_k F_{i0}\right)}{\partial x_k} - \frac{\partial\left(H^{ik}u_k\right)}{\partial t} = J^i.$$

Im 4. Glied kann man ferner $J^i + \frac{\partial \mathsf{E}^i}{\partial t}$ statt $\frac{\partial f^{ik}}{\partial k_k}$ schreiben, im sechsten ϱ statt $\frac{\partial f^{0k}}{\partial x_k}$. Endlich formen wir das vorletzte Glied so um:

$$\frac{\partial\left(u_k F_{i0}\right)}{\partial x_k} = u_k\frac{\partial F_{i0}}{\partial x_k} - F^{0i}\frac{\partial u^k}{\partial x_k},$$

und wegen

$$\frac{\partial F_{i0}}{\partial x_k} = \frac{\partial F_{ik}}{\partial t} + \frac{\partial F_{k0}}{\partial x_i}:$$

$$\frac{\partial\left(u_k F_{i0}\right)}{\partial x_k} = u_k\frac{\partial H^{ik}}{\partial t} + \frac{\partial\left(\mathsf{E}^k u_k\right)}{\partial x_i} - \mathsf{E}^k\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \mathsf{E}^i u_k^k.$$

Endgültig erhalten wir also für die Gleichungen $i = 1, 2, 3$:

Φ und Ψ genügen dabei der Relation:

$$\frac{\Phi g^{11} + \Psi g^{00}}{g^{11} + g^{00}} = 1.$$

4. Die Gleichungen $(\mathrm{III}_{1,2})$ sind von der Form der Maxwellschen Gleichungen bei aufgehobener Gravitation. Wir sehen aber, daß die ursprünglich gegebenen Strom und Ladung durcheinandergemischt sind. Wir haben Beispiele (im Felde einer rotierenden Massenkugel) gesehen, wo

$$\frac{4}{5}\,\varrho m\omega\left(\frac{l}{r}\right)^2$$

als Strom und

$$\frac{4}{5}\,Jm\omega\left(\frac{l}{r}\right)^2$$

als statische Ladung auftritt. Rechts in $(\mathrm{III}_{1,2})$ stehen lauter bekannte Größen. Denn das äußere Gravitationsfeld ist gegeben. E^i und H^{ik} werden aber aus gegebenen $s^0 = \varrho$ und $s^i = J^i$ $(i = 1, 2, 3)$ auf Grund der gewöhnlichen Maxwellschen Gleichungen bestimmt. Es müssen also zunächst die gewöhnlichen Maxwellschen Gleichungen gelöst werden; dann geben die Gleichungen $(\mathrm{III}_{1,2})$ das wirkliche Feld[1]). (Wegen der vektoriellen Form der Gleichungen $\mathrm{III}_{1,2}$ vgl. unten.)

Vergleichen wir die Gleichungen (III) mit den (I) und (II), so sehen wir, daß die rechten Seiten von (III) sich aus den rechten Seiten von (I) und (II) additiv zusammensetzen. Es treten nur die letzten Zeilen hinzu, die elektromagnetische „Induktionsglieder" vereinigen. Auch sonst ist der Bau von (III_1) und (III_2) analog. In erster Zeile stehen die analog gebauten „gravitationsstatischen" Glieder. Dem „Konvektionsstrom" entspricht die „Konvektionsladung", dem „Verzerrungsstrom" — die „Rotationsladung" (wobei rot so zum Magnetfeld gehört, wie der „Verzerrungstensor" zum elektrischen Feld).

In (III_1) fehlt das „Leistungsglied" (keine magnetische „Leistung"!), ebenso die „Masseninduktionsglieder". In (III_2) ist bei diesen das elektrische Feld so mit Φ verknüpft, wie das Magnetfeld mit u^i.

5. Wir wollen noch zum Schlusse dieses

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f^{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = s^i = J^i(1+\Psi) + H^{ik}\frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \\ + \varrho u^i + \left(2\,\mathsf{E}^k u_k^i - \mathsf{E}^i u_k^k\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} - \mathsf{E}^i\frac{\partial \Phi}{\partial t} + H^{ik}\frac{\partial u_k}{\partial t} \\ + (\Psi - \Phi)\frac{\partial \mathsf{E}^i}{\partial t} + 2\left(u_k\frac{\partial H^{ik}}{\partial t}\right).\end{aligned}\right| \quad (\mathrm{III}_2)$$

[1]) Die weitere Verfolgung dieses Gedankens würde zu einer Methode sukzessiver Approxmixationen führen.

Paragraphen direkt durch Rechnung verifizieren, daß der in (III, 2) rechts auftretende Vierer-strom s^α tatsächlich identisch der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial s^\alpha}{\partial x_\alpha} = 0$$

genügt. Es ist zunächst:

$$\frac{\partial s^0}{\partial t} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathsf{E}^k \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Phi \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \mathsf{E}^k}{\partial t}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + \\ + \frac{\partial (J^k u_k)}{\partial t} + \frac{\partial (H^{ik} v_{ik})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(u_k \frac{\partial \mathsf{E}^k}{\partial t}\right).$$

Ferner:

$$\frac{\partial s^i}{\partial x_i} = \frac{\partial J^i}{\partial x_i} + \Psi \frac{\partial J^i}{\partial x_i} + J^i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} - \left(J^k + \frac{\partial \mathsf{E}^k}{\partial t}\right)\frac{\partial \Psi}{\partial x_k} + H^{ik}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_k} + \\ + \varrho u_k^k + u^i \frac{\partial \varrho}{\partial x_i} + \left(2\mathsf{E}^k \frac{\partial u_k^i}{\partial x_i} - \mathsf{E}^i \frac{\partial u_k^k}{\partial x_i}\right) + \left(2\frac{\partial \mathsf{E}^k}{\partial x_i} u_k^i - \frac{\partial \mathsf{E}^i}{\partial x_i} u_k^k\right) - \triangle L - \\ - \mathsf{E}^k \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial \mathsf{E}^i}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial u_k}{\partial t}\left(J^k + \frac{\partial \mathsf{E}^k}{\partial t}\right) - H^{ik}\frac{\partial v_{ik}}{\partial t} + \\ + (\Psi - \Phi)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathsf{E}^i}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathsf{E}^i}{\partial t}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right) - 2\frac{\partial H^{ik}}{\partial t} v_{ik} - 2u_k \frac{\partial}{\partial t}\left(J^k + \frac{\partial \mathsf{E}^k}{\partial t}\right).$$

Man benutze die auch hier gültige Beziehung $\frac{\partial \mathsf{E}^i}{\partial x_i} = \varrho$, und auch $\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial J^i}{\partial x_i} = 0$. Ferner:

$$-\triangle L = \triangle \mathsf{E}^k u_k + 2\frac{\partial \mathsf{E}^k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \mathsf{E}^k \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}$$

(auch nach i summiert!).

Das zweite Glied ist hier

$$= \frac{\partial F^{0k}}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial F^{0i}}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k},$$

und wegen

$$\frac{\partial F^{0i}}{\partial x_k} = \frac{\partial F^{0k}}{\partial x_i} + \frac{\partial F^{ik}}{\partial t} \\ = -2\frac{\partial \mathsf{E}^k}{\partial x_i} u_k^i + \frac{\partial H^{ik}}{\partial t} v_{ik};$$

das erste wegen $\square \psi^0 = \varrho$, $\square \psi^i = J^i$

$$\triangle \mathsf{E}^k u_k = u_k \frac{\partial^2 \mathsf{E}^k}{\partial t^2} + u_k \frac{\partial J^k}{\partial t} - u^k \frac{\partial \varrho}{\partial x_k}.$$

Setzt man alles ein, so sieht man, daß sich alle Glieder paarweise aufheben.

§ 4. Vektorielle Form der elektromagnetischen Gleichungen im schwachen Gravitationsfelde. Vakuum.

1. Wir wollen nun die Maxwellschen Gleichungen (III) im schwachen Gravitationsfelde in Vektorform umschreiben. Dadurch gewinnen sie eine besonders übersichtliche und sozusagen endgültige Gestalt. Es seien $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{B}_0$ die Lösungen der gewöhnlichen Maxwellschen Gleichungen mit gegebener Ladungsdichte ϱ und Stromdichte i, bei aufgehobener Gravitation; $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$ der wirkliche Feldverlauf im schwachen Gravitationsfelde. Ferner sei:

$$\mathfrak{u} = (u^1, u^2, u^3),\ \mathfrak{E}_0 = (\mathsf{E}^1, \mathsf{E}^2, \mathsf{E}^3), \\ \mathfrak{B}_0 = (H^1, H^2, H^3) = (H^{23}, H^{31}, H^{12}). \qquad (1)$$

Wir benutzen die Beziehungen

$$(H^{ik} v_{ik}) = (\mathfrak{B}_0\, \mathrm{rot}\, \mathfrak{u}),$$
$$(H^{ik} a_k) = [\mathfrak{B}_0, \mathfrak{a}] \quad \text{mit } \mathfrak{a} = (a^1, a^2, a^3),$$
$$\left(H^{ik}\frac{\partial \Psi}{\partial x_k}\right) = [\mathrm{grad}\, \Psi, \mathfrak{B}_0];$$

ferner die Formel:

$$\mathrm{grad}\,(\mathfrak{E}_0, \mathfrak{u}) = [\mathfrak{E}_0, \mathrm{rot}\, \mathfrak{u}] + [\mathfrak{u}, \mathrm{rot}\, \mathfrak{E}_0] + \\ + (\mathfrak{E}_0\, \mathrm{grad})\, \mathfrak{u} + (\mathfrak{u}\, \mathrm{grad})\, \mathfrak{E}_0$$

und die Gleichung

$$\mathrm{rot}\, \mathfrak{E}_0 = -\frac{\partial \mathfrak{B}_0}{\partial t}.$$

Wir bezeichnen noch den Vektor

$$\mathsf{E}^1 \mathrm{grad}\, u^1 + \mathsf{E}^2 \mathrm{grad}\, u^2 + \mathsf{E}^3 \mathrm{grad}\, u^3$$

mit $(\mathfrak{E}_0\, \mathfrak{u})\, \mathrm{grad}$.

Dann lauten die Gleichungen (III) (i sei der Vektor J^i):

$$\mathrm{div}\, \mathfrak{E} = \varrho(1 + \Phi) - (\mathfrak{i}\mathfrak{u}) + (\mathrm{grad}\, \Phi, \mathfrak{E}_0) + (\mathrm{rot}\, \mathfrak{u}, \mathfrak{B}_0) - \left(\mathfrak{u}\frac{\partial \mathfrak{E}_0}{\partial t}\right),$$

$$\mathrm{rot}\, \mathfrak{B} - \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \mathfrak{i}(1 + \Psi) + \varrho \mathfrak{u} + [\mathrm{grad}\, \Psi, \mathfrak{B}_0] + [\mathrm{rot}\, \mathfrak{u}, \mathfrak{E}_0] \\ + (\mathfrak{E}_0, \mathfrak{u})\, \mathrm{grad} - (\mathfrak{u}\, \mathrm{grad})\, \mathfrak{E}_0 - \mathfrak{E}_0\, \mathrm{div}\, \mathfrak{u} \\ - \mathfrak{E}_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{u}, \mathfrak{B}_0] + (\Psi - \Phi)\frac{\partial \mathfrak{E}_0}{\partial t}.$$

Nun ersetzen wir in der ersten Gleichung, auf Grund der Maxwellschen Gleichungen für $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{B}_0$, $\frac{\partial \mathfrak{E}_0}{\partial t}$ durch $\operatorname{rot} \mathfrak{B}_0 - i$, $(\operatorname{grad} \Phi, \mathfrak{E}_0)$ durch $\operatorname{div}(\Phi \mathfrak{E}_0) - \Phi \operatorname{div} \mathfrak{E}_0 = \operatorname{div}(\Phi \mathfrak{E}_0) - \Phi \varrho$ und benutzen die Formel:

$$\operatorname{div}[u, \mathfrak{B}_0] = (\mathfrak{B}_0 \operatorname{rot} u) - (u \operatorname{rot} \mathfrak{B}_0).$$

In der zweiten Gleichung benutzen wir die Formeln:

$$\operatorname{rot}(\Psi \mathfrak{B}_0) = [\operatorname{grad} \Psi, \mathfrak{B}_0] + \Psi \operatorname{rot} \mathfrak{B}_0 = [\operatorname{grad} \Psi, \mathfrak{B}_0] + \Psi \frac{\partial \mathfrak{E}_0}{\partial t} + i \Psi,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}[u, \mathfrak{E}_0] &= u \operatorname{div} \mathfrak{E}_0 - \mathfrak{E}_0 \operatorname{div} u + (\mathfrak{E}_0 \operatorname{grad}) u - (u \operatorname{grad}) \mathfrak{E}_0 \\ &= \varrho u - \mathfrak{E}_0 \operatorname{div} u + (\mathfrak{E}_0 \operatorname{grad}) u - (u \operatorname{grad}) \mathfrak{E}_0, \\ (\mathfrak{E}_0 u) \operatorname{grad} - (\mathfrak{E}_0 \operatorname{grad}) u &= [\mathfrak{E}_0, \operatorname{rot} u]. \end{aligned}$$

Dann haben wir die Gleichungen:

$$\begin{gathered} \operatorname{div}(\mathfrak{E} - \Phi \mathfrak{E}_0 - [u, \mathfrak{B}_0]) = \varrho, \\ \operatorname{rot}(\mathfrak{B} - \Psi \mathfrak{B}_0 - [u, \mathfrak{E}_0]) \\ - \frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{E} - \Phi \mathfrak{E}_0 - [u, \mathfrak{B}_0]) = i, \\ \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0. \end{gathered}$$

Wir erklären Φ und Ψ nunmehr lieber durch:

$$\Phi = -1 - \sqrt{g}\, g^{00} g^{11}, \quad \Psi = 1 - \sqrt{g}\, (g^{11})^2. \quad (2)$$

Die erhaltenen Gleichungen laden nun ein, die „Polarisation" und die „Magnetisierung" im gravitationsfreien Raume einzuführen, gemäß:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \Phi \mathfrak{E}_0 - [u, \mathfrak{B}_0] \\ \mathfrak{M} &= \Psi \mathfrak{B}_0 + [u, \mathfrak{E}_0] \end{aligned} \quad \text{(IVa)}$$

und

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + \mathfrak{P}, \ \mathfrak{B} = \mathfrak{H} + \mathfrak{M} \quad \text{(IVb)}$$

zu setzen. Dann gelten im schwachen Gravitationsfelde die gewöhnlichen Maxwellschen Gleichungen des inhomogenen Mediums:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} &= i, \quad \operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho \\ \operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0 \end{aligned} \quad \text{(IVc)}$$

2. Aus der Form (IV) der Maxwellschen Gleichungen sehen wir nun ein, daß der Einfluß des schwachen Gravitationsfeldes auf den Ablauf der elektromagnetischen Erscheinungen sich so auffassen läßt: der leere gravitationsfreie Raum erhält die durch (IVa) definierte „Polarisation" und „Magnetisierung", wodurch er im allgemeinen zu einem inhomogenen polarisierten und magnetisierten Medium wird. Man kann auch sagen: der leere Raum („Äther") ist nicht nur des Faraday-Maxwellschen Spannungszustandes fähig (der durch das elektromagnetische Feld bestimmt ist), sondern auch der Polarisation und der Magnetisierung (die durch das Zusammenwirken mit dem Gravitationsfelde, in welchem sich elektromagnetische Vorgänge abspielen, zustandekommen). Alle bisher eingeführten Strom- und Ladungsgattungen lassen sich also auch als „Polarisations"- und „Magnetisierungsströme" und „Polarisationsladung" (im Sinne von H. A. Lorentz) im gravitationsfreien Raum auffassen[1]).

3. Für das Vakuum wäre in unseren Gleichungen (IV) $\varrho = i = 0$ zu setzen. Zu jeder Lösung der elektromagnetischen Vakuumgleichungen im gravitationslosen Raum, d. h. zu jeder Möglichkeit der Wellenausbreitung in einem solchen, geben diese Gleichungen ihre Modifikation durch das schwache Gravitationsfeld. Als naheliegende Aufgaben würden sich hier bieten: die Ausbreitung der aus dem Unendlichen kommenden elektromagnetischen ebenen Wellen auf einem im Galileischen Raum rotierenden Bezugssystem oder im Gravitationsfelde einer rotierenden Massenkugel. (Das zweite dieser Probleme würde etwa durch die von den Fixsternen kommenden an der rotierenden Sonne vorübereilenden elektromagnetischen Planwellen realisiert; das erste — durch die auf die Erde zueilenden Wellen). Es sei jedoch die Behandlung dieser rein mathematischen Aufgabe einer späteren Mitteilung vorbehalten.

Hier soll nur eine Bemerkung über das schwache statische Gravitationsfeld Platz finden. In diesem Falle ist $u = 0$, so daß nur Φ und Ψ zu berechnen sind. Man kann nun im statischen kugelsymmetrischen Fall immer streng ein solches Koordinatensystem einführen, daß das

1) Die Ausdrücke (IVa), sowie die in den Zwischenrechnungen auftretenden „Konvektionsstrom" ϱu und „Konvektionsladung" — (iu), erinnern an die in der Elektrodynamik bewegter Körper auftretenden Verbindungen. Vgl. H. Weyl, R. Z. M. (4. Aufl.), S. 175.

Linienelement des Raumes eine konform-euklidische Gestalt bekommt[1]). Im schwachen Feld wird insbesondere[2]):

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{r}, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -\left(1 + \frac{2m}{r}\right);$$

$$g^{00} = 1 + \frac{2m}{r}, \quad g^{11} = g^{22} = g^{33} = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right);$$

$$\sqrt{g} = 1 + \frac{2m}{r}.$$

Es ist dann

$$\Phi = -1 - \sqrt{g}\, g^{00} g^{11} = \frac{2m}{r},$$

$$\Psi = 1 - \sqrt{g}\,(g^{11})^2 = \frac{2m}{r} = \Phi,$$

und man erhält für „Polarisation" und „Magnetisierung" nach (IVa):

$$\mathfrak{P} = \Phi \mathfrak{E}_0 \sim \Phi \mathfrak{E},$$
$$\mathfrak{M} = \Phi \mathfrak{B}_0 \sim \Phi \mathfrak{B} \sim \Phi \mathfrak{H}.$$

Wenn man nunmehr unter Φ das Newtonsche Potential $-\frac{m}{r}$ versteht, so gilt:

$$\mathfrak{P} = -2\Phi \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{D} = (1 - 2\Phi)\mathfrak{E}$$
$$\mathfrak{M} = -2\Phi \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{B} = (1 - 2\Phi)\mathfrak{H} \qquad \text{(V)}$$

-2Φ spielt also die Rolle des (elektrischen und magnetischen) Suszeptibilitätsfaktors, $1 - 2\Phi$ die des räumlich variablen Dielektrizitäts- oder Permeabilitätsfaktors.

Diese Ergebnisse enthalten folgende physikalische Auffassung der Einsteinschen Strahlenablenkung im statischen Gravitationsfelde. Als ihr Ursprung ergibt sich sozusagen die inhomogene Polarisation und Magnetisierung des Vakuums durch das Zusammenwirken des Gravitationsfeldes mit dem elektromagnetischen Felde; es ist, als wenn der leere Raum dadurch zu einem inhomogenen polarisierten und magnetisierten Medium würde. Es geht hier ebenso, wie mit den elastischen Spannungen. Vor Maxwell hat man sie nur einem elastischen Stoffe zugeschrieben. Faraday ist zunächst zu der Vorstellung der elektromagnetischen Spannungen in einem Dielektrikum gelangt. Faraday-Maxwell haben sie dann auch dem leeren Raum (Äther) zuschreiben müssen. Vom Standpunkte der hier sich ergebenden Auffassung müßte man sagen, daß der leere Raum („Äther") nicht nur des Spannungszustandes, sondern — unter Berücksichtigung der Gravitation — auch der Polarisation und Magnetisierung fähig ist.

Es würde sich hier die rein elektrodynamische Ableitung der Einsteinschen „Strahlenkrümmung" ergeben. Die sonstigen Ableitungen benutzen immer die geodätische Nullinie, also eine weltgeometrische Tatsache; es sollte dann eigentlich dieser Satz über die Nullinie auch aus den allgemeinen Maxwellschen Gleichungen abgeleitet werden, da das Licht eine elektromagnetische Erscheinung ist.

4. Es mag hier nur die folgende Andeutung Platz finden. Unsere Formeln liefern für die Dielektrizitäts- und Permeabilitätsfaktoren

$$\varepsilon = \mu = 1 - 2\Phi$$

(wo Φ das Newtonsche Potential ist). Wendet man die klassische Formel für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen an, so hat man für diese

$$c^* = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = c\,(1 + 2\Phi),$$

also die vollständige Einsteinsche Formel für die Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit vom Gravitationspotential (Die „speziellen" Felder liefern bekanntlich $c^* = c\,(1 + \Phi)$). Man pflegt zu sagen, daß die „Strahlenkrümmung" im Gravitationsfeld zur Hälfte schon in der Newtonschen Theorie sich einordnen ließe; zur Hälfte rühre sie aber von der Nichteuklidizität der Geometrie her. Vom Standpunkte der sich hier ergebenden Auffassung müßte man sagen, daß die Strahlenablenkung zur Hälfte durch die „Polarisation", zur Hälfte durch die „Magnetisierung" des Raumes im Gravitationsfelde zustandekommt.

(Eingegangen 25. September 1921.)

1) H. Weyl, „Zur Gravitationstheorie". Ann. d. Phys. **54**, 132, 1917.

2) T. Levi-Cività, „ds^2 einsteiniani in campi newtoniani". I. Acc. dei Linc. **26**, 317, 1917, oder A. Einstein, Berl. Ber. 1916, S. 692.

Die Magnetisierbarkeit der Zink-Eisenlegierungen niederen Eisengehaltes.

Von Ernst Lehmann.

Untersuchungen von K. Honda[1]) haben einen engen Zusammenhang zwischen dem magnetischen Verhalten und der strukturellen Beschaffenheit von Legierungen mit ferromagnetischer Komponente ergeben. Es wurde das Diagramm der Suszeptibilität in Abhängigkeit vom Prozentgehalt jeweils verglichen mit dem aus der Erkaltungskurve der betreffenden Legierung gewonnenen Bild ihrer kristallographi-

1) K. Honda, Ann. d. Phys. **32**, 1003, 1910.

schen Beschaffenheit. In der gegenwärtigen Untersuchung soll dieses Verfahren auf die Zink-Eisenlegierungen angewendet werden. In thermisch-kristallographischer Hinsicht sind diese Legierungen bis zu 24 Proz. Eisen von v. Vegesack[1]) eingehend studiert. Obwohl wegen entgegenstehender äußerer Umstände nur der Bereich von 0—8,5 Proz. *Fe* von mir auf sein magnetisches Verhalten hin untersucht werden konnte, ergaben sich in diesem Gebiet doch sehr bemerkenswerte Aufschlüsse. Hierdurch dürfte ein kurzer Bericht über die an anderem Ort[2]) ausführlicher dargelegten Untersuchungen gerechtfertigt erscheinen.

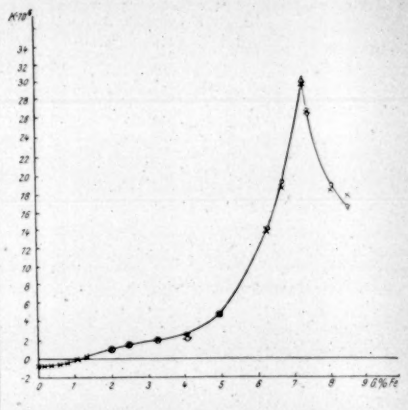
1. Experimentelle Einzelheiten.

Die Herstellung der Legierungen geschah anfangs durch Beigabe von Eisenpulver zu geschmolzenem Zink. Damit gelangt man wegen lebhafter Oxydationsprozesse bei vermehrter Eisenzugabe jedoch nur bis zu 4 Proz. Eisengehalt. Durch Beigabe von dünnem Eisendraht an Stelle des Pulvers gelangte man dagegen mit den verfügbaren Hilfsmitteln bis zu 8,5 Proz. *Fe*.

Zur Bestimmung der Suszeptibilität wurde die von K. Overbeck[3]) beschriebene Methode verwendet, d. h. es wurde die Kraft gemessen, die ein inhomogenes Feld auf die bifilar aufgehängte Legierung ausübte. Bei den niederen Eisengehalten konnte aus der Größe der Ablenkung die rücktreibende Kraft des bifilaren Systems ermittelt werden. Bei den höherprozentigen, stärker magnetischen Legierungen erwies es sich wegen zu großen Ausschlags als vorteilhaft, die Lage der Legierung unverändert zu halten und die auf sie wirkende magnetische Kraft durch Gewichte zu kompensieren. Am feldfreien Ende der Legierung war ein langes Haar befestigt, das im oberen Teil horizontal verlief, über ein Röllchen führte und am vertikalen Ende eine Wagschale für Gewichtauflage trug.

2. Ergebnisse und Diskussion.

Die Ergebnisse der Messungen sind in der beigegebenen Figur enthalten. Die Ordinaten bedeuten die mit 10^6 multiplizierten Suszeptibilitäten, die Abszissen den Prozentgehalt. Bei den eingezeichneten Meßpunkten beziehen sich die Kreuze auf 3000 Gauß, die Punkte auf 6000 Gauß, und die Kreise auf 9000 Gauß. Wie aus der unregelmäßigen Lagerung von Kreuzen, Punkten und Kreisen gegeneinander



zu ersehen ist, war keine Feldabhängigkeit, also auch kein Ferromagnetismus in dem beobachteten Konzentrationsbereich vorhanden. Das Bemerkenswerteste an der Figur ist die Spitze bei 7,29 Proz. Eisen, wo die Suszeptibilität auf den beträchtlichen Wert von $30 \cdot 10^{-6}$ steigt.

Zur Diskussion unsrer Kurve haben wir das Erstarrungsdiagramm v. Vegesacks heranzuziehen. Er findet, daß im Bereich 0,7—7,3 Proz. *Fe* ein Gemenge zweier gesättigter Mischkristalle vorliegt und von 7,3 Proz. ab ein Gebiet ungesättigter Mischkristalle beginnt, bestehend aus $FeZn_7$ und reinem Zink. In unserer Spitze prägt sich diese Strukturänderung mit einer Deutlichkeit aus, wie sie in Hondas den Prozentgehalt mehr in großen Stufen ändernden Untersuchungen nirgends hervortritt. Für die Beurteilung des Kurvenverlaufs beiderseits der Spitze ist die folgende von Honda gefundene Gesetzmäßigkeit von Wichtigkeit:

„Der Paramagnetismus ist, ebenso wie der Ferromagnetismus, bestimmten Kristallarten eigentümlich. Infolgedessen ändert sich der Paramagnetismus der Legierungen linear mit der Konzentration, wenn diese aus zwei Kristallarten bestehen; beim Ersetzen einer der beiden Kristallarten durch eine neue wird die lineare Abhängigkeit von der Konzentration eine andere."

Darnach sollte im Gebiet 0,7—7,3 Proz. *Fe*, wo v. Vegesack zwei gesättigte Mischkristalle findet, der Verlauf der Suszeptibilität geradlinig sein; im Bereich jenseits 7,3 Proz. wäre dagegen ein gekrümmter Verlauf zu erwarten. Tatsächlich ist unsere Kurve aber beiderseits der Spitze stark gekrümmt; und wenn man der Hondaschen Regel Vertrauen schenkt, erscheint es

1) v. Vegesack, Zeitschr. f. anorg. Ch. **52**, 30, 1907.
2) E. Lehmann, Die Magnetisierbark. d. Zink-Eisenlegierungen nied. Eisengehaltes, Diss. Rostock 1921.
3) K. Overbeck, Über metamagnet. Legierungen. Sitzb. u. Abh. der naturf. Ges. zu Rostock, **6**, 141, 1914.

zweifelhaft, ob das Strukturbild wirklich so einfach ist, wie aus der thermischen Analyse erschlossen wurde.

Schließlich wurden noch orientierende Beobachtungen der Suszeptibilität im (Glyzerin-) Temperaturbad gemacht, mit dem Ergebnis, daß eine Temperaturerhöhung bis 160° den Charakter der oben für 18° gegebenen Kurve nicht ändert.

Die vorliegende Arbeit wurde auf Veranlassung meines verstorbenen Lehrers Prof. R. H. Weber begonnen, dessen ich hier in Verehrung und Dankbarkeit gedenken möchte. Zugleich gestatte ich mir, auch an dieser Stelle meinen hochverehrten Lehrern Herrn Prof. Heydweiller und Herrn Prof. Lenz für die mir zuteil gewordene Förderung meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Rostock, Physikalisches Institut der Universität, September 1921.

(Eingegangen 30. September 1921.)

Elektrostriktion in Gasen, nebst Bestimmung von elektrischen Momenten fertiger Dipole.

Von O. E. Frivold.

Einleitung.

1. Die bei Herleitung der von der Waalsschen Zustandsgleichung eingeführten anziehenden Kräfte zwischen den Molekülen haben in einer vor kurzem erschienenen Arbeit von Herrn Debye[1]) ihre Deutung gefunden. Es wird in jener Arbeit gezeigt, daß eine gegenseitige Anziehung der Moleküle und dadurch ein dem äußeren zusätzlicher innerer Druck durch die elektrischen Felder zwischen den Molekülen zustande kommt, wenn man beachtet, daß die Moleküle polarisierbare Systeme elektrischer Ladungen sind.

Durch äußere elektrische Felder wird man versuchen können, diesen „inneren Druck" um einen allerdings äußerst kleinen Betrag zu vermehren. Die dadurch bedingte Kontraktion des Gasvolumens im elektrischen Felde (Elektrostriktion genannt) kann man dann durch eine geschickte Versuchsanordnung messen und in der Weise entscheiden, ob die der Theorie nach berechnete Volumenänderung mit der experimentell gefundenen übereinstimmt. Auch läßt sich aus der beobachteten Volumenänderung für Dipolgase das elektrische Moment der Dipole ermitteln. Diese molekuläre Größe hat man früher aus der anomalen Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante der betreffenden Gase berechnet[1]). Schließlich gibt dieses Verfahren auch prinzipiell eine Methode, die Dielektrizitätskonstante der Gase (und Flüssigkeiten) zu bestimmen.

Obgleich Herr Quincke[2]) schon im Jahre 1880 die ersten orientierenden Elektrostriktionsversuche mit Luft und Kohlendioxyd ausgeführt hat, ist es noch nicht gelungen, quantitative Messungen auszuführen. Herr Gans[3]) hat zwar die Apparatur von Quincke verbessert und Fehlerquellen beseitigt. Seine Messungen sind aber mehr qualitativer Natur. Quantitative Versuche sind auch schwer auszuführen, besonders wegen der sehr kleinen Kontraktionen, des großen Temperaturkoeffizienten der Gase und der Schwierigkeit, ein für Gase geeignetes Manometer zu konstruieren.

In dem experimentellen Teil werden diese Fragen näher erörtert. Hier sei nur noch erwähnt, daß die Versuchsanordnung, welche für die in dieser Arbeit beschriebenen Versuche Verwendung fand, noch einer Verbesserung bedarf, weshalb diese Mitteilung nur als eine vorläufige zu betrachten ist.

Zunächst ist nur ein einziges Gas, nämlich Schwefeldioxyd (ein Dipolgas) quantitativ untersucht worden. Da die Dipolgase der Theorie nach die größten Volumenänderungen geben dürften, ist absichtlich ein Dipolgas bei diesen orientierenden Versuchen verwendet. Wenn die Verbesserungen der Apparatur vorgenommen sind, werden diese Versuche auch mit anderen Gasen und möglicherweise auch mit Flüssigkeiten fortgesetzt.

Theoretisches.

2. Wir betrachten ein Gas unter Einwirkung eines elektrischen Feldes E. Bezeichnet U die potentielle Energie eines Moleküls in bezug auf das äußere Feld, so ist die Druckänderung $p - p_0$, welche das Gas bei Erregung des Feldes erfährt, durch die erweiterte Barometerformel bestimmt.

$$p = p_0 e^{-\frac{U}{kT}}, \qquad (1)$$

Hier bedeutet k die Boltzmannsche Konstante ($k = 1{,}37 \cdot 10^{-16}$ erg.) und T die absolute Temperatur.

Die potentielle Energie eines polarisierbaren Moleküls im Felde E, dessen Moment

$$m = \alpha \cdot E \qquad (2)$$

1) P. Debye, diese Zeitschr. **21**, 178, 1920.

1) P. Debye, diese Zeitschr. **13**, 97, 1912; M. Jona, diese Zeitschr. **20**, 14, 1919.
2) G. Quincke, Wied. Ann. **10**, 513, 1880.
3) R. Gans, Ann. d. Phys. **11**, 797, 1903.

(α eine Konstante) gesetzt werden kann, hat den Wert

$$U_1 = -\tfrac{1}{2}\alpha E^2. \qquad (3)$$

Die Konstante α läßt sich aus dem Ausdrucke der Molekularrefraktion P entnehmen:

$$P = \frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{M}{\varrho} = \frac{4\pi}{3}N\cdot\alpha. \qquad (4)$$

Hier geben n den Brechungsexponent auf die Schwingungszahl o extrapoliert, M, ϱ und N das Molekülargewicht, die Dichte und die Loschmidtsche Zahl ($N = 6{,}06\cdot 10^{-23}$) an.

Will man die Gleichung (1) auf Dipolgase anwenden, muß man dem Ausdruck (3) noch ein additives Glied hinzufügen. Dieses rührt von der potentiellen Energie der Dipole im Felde E her. Ganz analog wie Langevin für ein paramagnetisches Gas mit Hilfe der statistischen Mechanik einen Ausdruck für das mittlere magnetische Moment eines Moleküls ableitet, so kann man zeigen, daß das mittlere elektrische Moment μ eines Dipols bei „schwachen" Feldstärken E durch folgenden Ausdruck bestimmt ist:

$$\mu = \beta\cdot E, \qquad (5)$$

wo

$$\beta = \frac{\mu^2}{3kT} \qquad (6)$$

ist.

μ gibt den absoluten Betrag des Moments an.

Die potentielle Energie, die von dem Dipole herrührt, wird dann:

$$U_2 = -\tfrac{1}{2}\mu\cdot E = -\tfrac{1}{2}\beta\cdot E^2. \qquad (7)$$

Die Gesamtenergie eines Dipolmoleküls ist dann durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$U = U_1 + U_2 = -\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cdot E^2. \qquad (8)$$

Für ein Dipolgas wird also:

$$p = p_0 e^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\frac{E^2}{kT}}. \qquad (9)$$

Da α und β, wie wir später sehen werden, sehr kleine Größen sind, entwickeln wir die Exponentialfunktion in Gleichung (9) nach Potenzen von $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\frac{E^2}{kT}$ und brechen mit dem zweiten Gliede ab. Dann wird:

$$p = p_0\left[1 + \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\frac{E^2}{kT}\right] \qquad (10)$$

oder

$$\frac{p-p_0}{p_0} = \left|\frac{\triangle p}{p_0}\right| = \left|\frac{\triangle v}{v_0}\right| = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cdot\frac{E^2}{kT}. \qquad (11)$$

Hier gibt v_0 das ursprüngliche Volumen und $\triangle v$ die Volumenänderung an.

Die entsprechende von Lippmann[1]), Gans[2]) u. a. abgeleitete Formel lautet:

$$\left|\frac{\triangle v}{v_0}\right| = \frac{\varepsilon-1}{8\pi}\frac{E^2}{p}, \qquad (12)$$

wo ε die Dielektrizitätskonstante und p der Druck ist.

Diese Formel ist leicht aus Gleichung (11) abzuleiten, wenn man die von Debye erweiterte Lorenz-Lorentzsche Formel

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{M}{\varrho} = \frac{4\pi}{3}N(\alpha+\beta)$$

in Gleichung (11) substituiert.

3. Im Ausdrucke (11) stecken zwei Unbekannte: das optische Glied α und das Dipolmoment μ. Da Messungen nur in einem kleinen Temperaturbereich ausgeführt sind, kann allein eine der Konstanten bestimmt werden. Wie aus den Zahlenwerten später hervorgehen wird, ist α etwa $^1/_{10}$ der Größe β. Da übrigens α aus der Dispersionskurve leicht zu extrapolieren ist, wollen wir uns die Aufgabe stellen, das Dipolmoment für SO_2, durch Bestimmung der Kontraktion in einem Zylinderkondensator bei einer bestimmten Temperatur zu ermitteln.

Die Feldstärke E im Raume zwischen den zwei Zylindern läßt sich durch folgenden Ausdruck berechnen:

$$E = \frac{V_2 - V_1}{\log_n\frac{R_2}{R_1}}\cdot\frac{1}{r}. \qquad (13)$$

Hier bedeuten $V_2 - V_1$ die Potentialdifferenz in C. G. S., R_1 und R_2 die Radien der Zylinder und r den Abstand von der Achse bis zum Aufpunkte. Da die Feldstärke nach dem Ausdrucke (13) nicht konstant ist, müssen wir erst die Kontraktion für eine unendlich kleine Zylinderschale vom Radius r und der Dicke dr berechnen und durch Integration die gesamte Kontraktion bestimmen.

Die unendlich kleine Volumenänderung ist nach den Ausdrücken (11) und (13):

$$\triangle dv = \pi L\left(\alpha + \frac{\mu^2}{3kT}\right)\frac{1}{kT}\frac{(V_2-V_1)^2}{\left(\log_n\frac{R_2}{R_1}\right)^2}\frac{1}{r}\,dr$$

und

$$\triangle v = \int\triangle dv = 0{,}4343\,\pi L\left(\alpha+\frac{\mu^2}{3kT}\right)\frac{1}{kT}\frac{(V_2-V_1)^2}{\log\frac{R_2}{R_1}},$$

wo L die Länge des Zylinders bedeutet.

1) G. Lippmann, Ann. de Chem. et Phys. **24**, 145. 1881.

2) R. Gans, loc. cit.; Gans leitet Formel (12) auf Grund der Maxwellschen Theorie ab.

Daraus ergibt sich das elektrische Moment μ zu:

$$\mu = \left| \frac{kT \log \frac{R_2}{R_1}}{0{,}4343\,\pi L} \cdot \frac{\triangle v}{(V_2 - V_1)^2} - \alpha \right|^{\frac{1}{2}} \sqrt{3kT}. \quad (14)$$

Der entsprechende Ausdruck für einen Doppelkondensator, mit den Radien R_1, R_2, R_3 und R_4 ($R_1 < R_2 < R_3 < R_4$) (s. Fig. 2) wird:

$$\mu = \left[\frac{kT}{0{,}4343\,\pi L \left(\frac{1}{\log \frac{R_4}{R_3}} + \frac{1}{\log \frac{R_2}{R_1}} \right)} \cdot \frac{\triangle v}{(V_2 - V_1)^2} - \alpha \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{3kT}. \quad (14')$$

Das Potential des mittleren Zylinders (Radien R_2 und R_3) ist hier mit V_2, das des inneren und äußeren Zylinders mit V_1 bezeichnet. Bei den quantitativen Versuchen fand ein Doppelkondensator Verwendung.

Auf der rechten Seite im Ausdrucke (14') sind alles meßbare oder bekannte Größen.

Experimentelles.

4. Das Mikromanometer.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen den Versuchen, welche an dieser Stelle beschrieben werden sollen, und denjenigen, welche von Quincke und Gans ausgeführt sind, besteht in den verwendeten Mikromanometern.

Die zwei erwähnten Forscher haben die Volumenänderungen durch Beobachtung der Verschiebung einer Flüssigkeitssäule oder eines Tropfens in einer engen, dem Kugelkondensator angesetzten Kapillare gemessen. Da die Reibung sich in diesem Manometer stark bemerkbar macht, kann man dieses nur verwenden, wenn man es mittels bekannten Überdruckes eicht. Diese Schwierigkeit kann man jedoch folgendermaßen überwinden. Ist es möglich, suspendierte Teilchen im Gase sichtbar zu machen und halten sich diese Partikel genügend lange Zeit schwebend, so wird es möglich sein, eine Volumenänderung durch Beobachtung der Verschiebung der Partikel in einer Kapillare zu bestimmen. Ein nach diesem Prinzip von Herrn A. Piccard konstruiertes Mikromanometer wurde verwendet, um kleine Dichteunterschiede in Flüssigkeiten zu bestimmen[1]).

1) A. Piccard et E. Cherbuliez, Archives des Sciences Physiques et Naturelles, **42**, 324, 1916; O. E. Frivold, diese Zeitschr. **21**, 529, 1920.

Für Gase hat dieses Mikromanometer mit einigen Abänderungen bei diesen Versuchen auch Verwendung gefunden.

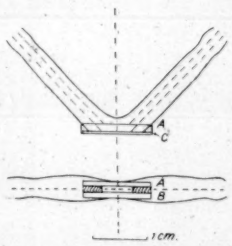


Fig. 1.

Ein umgebogenes Messingrohr (Fig. 1) ist vorn, oben und unten bis zum Lumen plan abgeschliffen. Die zwei Glasplatten A und B und ein Deckgläschen C vorn grenzen eine kleine Kapillare mit rechteckigem Querschnitt ab. Die Glasplatten A und B sind mit Picein an das Metall, das Deckgläschen C ist mit schwarzem Schellack (in etwas Alkohol aufgelöst) an den Glasplatten A und B befestigt. Der Querschnitt betrug etwa 0,4 mm².

Diese kleine Kapillare wurde von oben mit einem engen scharfen Lichtbündel beleuchtet. Bringt man Tabaksrauch in diese Kapillare ein, so sind die einzelnen Teilchen in einem vorn aufgestellten Mikroskop erkennbar.

Es sei noch bemerkt, daß die Teilchen nur dann leicht erkennbar sind, wenn man stark reflektierende Flächen, wie Metallflächen, gut schwärzt[1]).

5. Erste Form der Versuchsanordnung.

Die orientierenden Versuche wurden mit einem kleinen Plattenkondensator ausgeführt. (Drei Platten: Durchmesser 12 cm, Abstand 0,8 cm.) Der Kondensator befindet sich in einem Exsikkator (etwa 2000 cm³), welcher durch ein enges Glasrohr mit einem ungefähr gleich großen Exsikkator (Schutzgefäß) in Verbindung steht. Das Mikromanometer ist in dem Glasrohre eingeschaltet. Es ist notwendig, das System von der Atmosphäre in der angegebenen Weise zu isolieren. Ohne Schutzgefäß wird es wegen der Druckschwankungen in der Atmosphäre nicht möglich sein, quantitative Versuche auszuführen. Dadurch wird allerdings das Mikromanometer

1) Die Rauchteilchen sind von der Größenordnung, daß man leicht Brownsche Bewegungen wahrnimmt. Diese unregelmäßigen Bewegungen veranlassen bei den quantitativen Messungen jedoch keine systematischen Fehler.

unempfindlicher, denn durch die Druckänderung im Schutzgefäß wird die Verschiebung der Partikeln verkleinert.

Bezeichnet v_i das Volumen des Exsikkators, in dem sich der Kondensator befindet und v_a das Volumen des Schutzgefäßes, so werden alle Verschiebungen wegen der Druckänderungen im Schutzgefäße bei gegebener einseitiger Druckänderung im Kondensator im Verhältnis $\frac{v_a}{v_a + v_i}$ verkleinert.

Auch wenn das System gut thermisch geschützt wird (die Exsikkatoren sind gut mit Filz geschützt; das ganze System befindet sich in einem Holzkasten mit Baumwolle), ist der Temperaturunterschied zwischen den zwei Gefäßen zu groß, um Messungen ausführen zu können. Ohne Anlegung des elektrischen Feldes sind die Partikel in starker Bewegung.

Um thermisches Gleichgewicht herzustellen, ist eine Widerstandsspirale in jedem der Exsikkatoren angebracht. Mittels eines regulierbaren elektrischen Stromes in einer der Spulen wird es möglich, die Partikeln zum Stillstand zu bringen, wenn es nicht notwendig ist, größere Energiemengen als etwa 0,5 Watt anzuwenden. Andernfalls treten leicht Schwankungen in der Gasmenge ein.

Mit dieser Versuchsanordnung wurden einige Versuche mit Luft und Schwefeldioxyd[1]) gemacht.

Bei Anlegung einer Spannung von 10900 Volt an die mittlere Kondensatorplatte (die zwei anderen Platten des Kondensators sind geerdet) wurden für Luft kaum meßbare Kontraktionen im Mikromanometer beobachtet, für Schwefeldioxyd betrug die Verschiebung etwa 5 Skalateile.

Unter Anwendung von Zahlenangaben für a, β und den Querschnitt des Mikromanometers, welche unten angegeben werden sollen, lassen sich nach Gleichung (11) die Verschiebungen in den zwei Fällen zu 0,2 Skt. bzw. 4 Skt. berechnen. Der Größenordnung nach ist die Übereinstimmung befriedigend.

Diese Versuche zeigten, daß die Dimensionen des Kondensators zu klein sind und die Temperaturdifferenz zwischen den zwei Gefäßen zu groß wird, um quantitative Versuche ausführen zu können. Die Apparatur wurde deshalb umgebaut.

6. Verbesserung der bisherigen Anordnung.

Um das ganze System auf möglichst gleiche Temperatur zu bringen, wurde der Kondensator (k) in einen größeren Glaszylinder (N) eingebaut (Fig. 2 und 3).

Der vom Kondensator nicht verdrängte Raum des Glaszylinders dient als Schutzgefäß. Ein umgebogenes Glasrohr, in welchem das Mikromanometer M eingeschaltet ist, bringt den Zylinderkondensator mit dem Glaszylinder in Verbindung. Der Tabaksrauch wird von einem Behälter mit Hilfe eines Druckballons durch die Röhre c und d in das Mikromanometer eingeblasen. Beim Einblasen des Rauches sind die Hähne f und g geschlossen.

Der thermische Schutz ist mit Hilfe des Zinkkastens Z (bis h mit Wasser und oben mit

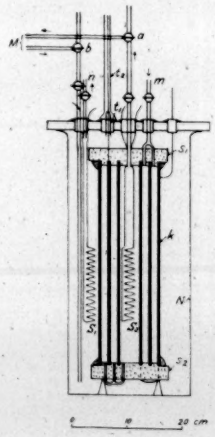


Fig. 2.

Baumwolle gefüllt) und der drei Holzgefäße G_1, G_2 und G_3 bewerkstelligt. Das äußere System ist bis H mit Wasser gefüllt. Strömungen im Wasser werden durch die Wände G_1 und G_2 vermindert. Die Glasröhren außerhalb der Gefäße sind mit Baumwolle (im Holzkasten) gut geschützt. Vor jedem Versuch wurde der Rührer R in Bewegung gesetzt.

Mit dieser Anordnung zeigte es sich, daß der Temperatureffekt sich viel geringer bemerkbar machte als früher. Um Gleichgewicht im Gase herzustellen, ist es jedoch auch jetzt notwendig, mittels eines ganz schwachen elektrischen Stromes in einer der Spiralen S_1 oder S_2 zu kompensieren. Maximal wurden etwa 5.10^{-3} Watt verwendet.

1) Das Schwefeldioxyd wurde durch Zutröpfeln von Schwefelsäure 50 Proz. in Natriumbisulfit hergestellt. Als Trockenmittel wurde konz. H_2SO_4 verwendet.

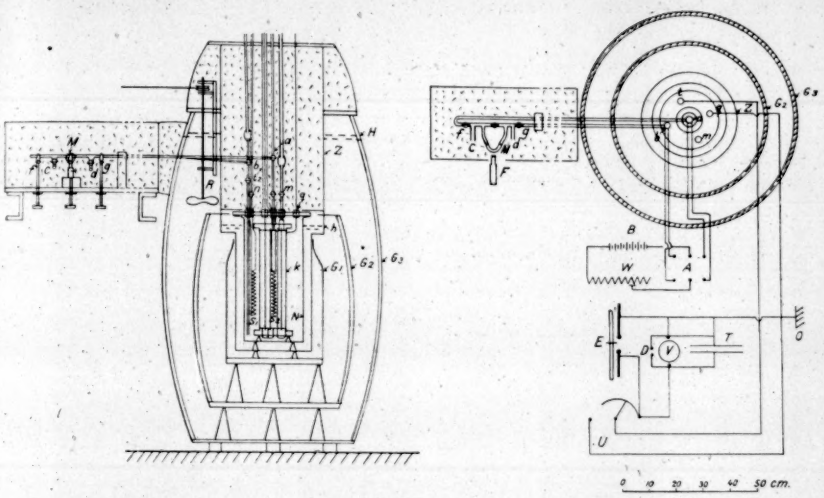


Fig. 3.

7. Der Zylinderkondensator und die übrige Apparatur.

Es wurde ein Zylinderkondensator k (Fig. 2 und 3) mit drei Zylindern verwendet[1]). Eine Influenzmaschine (E) dient als Spannungsquelle. Mittels des Hochspannungsumschalters U kann der mittlere Zylinder bei der Beobachtungsstelle F schnell aufgeladen und geerdet werden. Der äußere und innere Zylinder sind stets geerdet.

Die übrige Apparatur ist aus Fig. 3 ersichtlich. B ist eine Akkumulatorenbatterie, W ein Regulierwiderstand, A ein Umschalter der Widerstandsspiralen S_1 und S_2, E die Influenzmaschine, T eine große Leydener Flasche, V ein Kelvinelektrometer (2 Quadranten; für Spannungen bis 13000 Volt konstruiert) und D ein Funkenmikrometer.

8. Ausmessung des Mikrometerquerschnittes und Eichung des Elektrometers.

Die Verschiebung eines Rauchpartikels im Mikromanometer M wird in einem Mikroskop F mit Okularmikrometer beobachtet. Kennt man die Mikrometervergrößerung und den Querschnitt des Mikromanometers, so kann man die Volumenänderung, die durch ein gegebenes elektrisches Feld zustande kommt, berechnen.

Der quadratische Querschnitt wurde in der Weise bestimmt: Die Breite des quadratischen Raumes (Fig. 1) wurde (nachdem das Deckgläschen entfernt war) direkt in Skalateilchen auf dem Okularmikrometer abgelesen. Stellt man dann das Mikroskop einmal auf die hintere Seite des Deckgläschens und dann auf den Boden des Mikromanometers ein, so gibt die Verschiebung des Mikroskops direkt die Tiefe der Kapillare an[1]). Die Verschiebung des Mikroskops wurde mit Hilfe eines zweiten mit Okularmikrometer versehenen Mikroskops bestimmt. Das erste Mikroskop trägt einen Zeiger, an dem eine Glasplatte mit einem feinen Riß befestigt ist. Dieser Riß wurde im zweiten Mikroskop beobachtet. Die Verschiebung des ersten Mikroskops konnte dann direkt auf dem Okularmikrometer des zweiten Mikroskops abgelesen werden.

Da das Deckgläschen vor jeder Meßserie entfernt werden mußte, um gereinigt zu werden, ist bei jeder Meßserie der Querschnitt aufs neue bestimmt. Die unten angegebenen Zahlen sind Mittelwerte aus einer Reihe von Messungen. Der Querschnitt war auf einer Strecke von etwa 2 mm auf etwa 3 Proz. konstant.

1) s_1 und s_2 sind Schwefelstücke. Alle Dichtungen sind mit Picein und Schellack bewerkstelligt. Mittels eines Quecksilbermanometers wurde es mehrmals konstatiert, daß die verschiedenen Teile des Systems dicht waren. Die für die Hochspannung verwendete Isolation, nämlich Schwefel, Picein und Glas, erwiesen sich bei trockenem Wetter ausgezeichnet.

1) Dieses Verfahren gibt nur dann ein richtiges Resultat, wenn das Deckgläschen planparallel ist. Daß dieses hinreichend der Fall war, wurde experimentell geprüft.

Das Elektrometer wurde mit Hilfe des Funkenmikrometers D geeicht.

9. Die Meßresultate.

Die Resultate von drei Meßserien sind in Fig. 4 wiedergegeben.

Die Ordinaten stellen die Verschiebungen der Rauchpartikeln im Okularmikrometer in Skalateilen, die Abszissen das Quadrat der Feld-

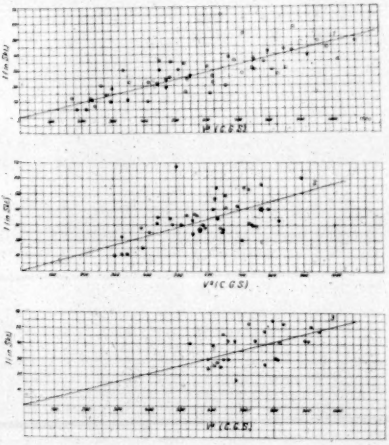


Fig. 4.

stärke (C. G. S.) dar. Die Kurven 1, 2 und 3 sind mittels der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt. Diese Kurven sollen der Theorie nach Graden durch den Nullpunkt darstellen. Da die Punkte, welche die Kurven 1, 2 und 3 bestimmen, unregelmäßig verteilt sind, ist eine Proportionalität zwischen l und $(V_2 - V_1)^2$ aus Fig. 4 nicht leicht zu erblicken. Diese Proportionalität geht aber deutlich hervor, wenn man Mittelwerte von l und $(V_2 - V_1)^2$ für Intervalle auf je 100 Einheiten der Abszisse berechnet. Die Punkte, welche die Kurve 4 (Fig. 5) bestimmen, sind aus der ersten Meßserie berechnet. Die Proportionalität geht hier deutlich hervor.

Die Ausgleichsrechnung gibt als Resultat das Verhältnis $\frac{l}{(V_2 - V_1)^2}$. In der Tabelle unten ist daraus l für $(V_2 - V_1)^2 = 1000$ berechnet.

Die optische Konstante α berechnet sich aus Gleichung (4). Dabei ist der Wert von $n^2 = 1{,}00137$ gesetzt (aus den Angaben in Lora: Lichtbrechung in Gasen, extrapoliert). $M = 64{,}07$ und $\varrho = 0{,}002731$.

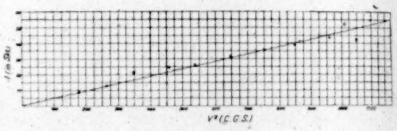


Fig. 5.

Unten und in der Tabelle I sind die für die Berechnung von μ (aus Gleichung 14') nötigen Angaben zusammengestellt.

Volumen des Kondensators $v_i = 2475\ \text{cm}^3$
Volumen des Schutzgefäßes $v_a = 12324\ \text{cm}^3$.

Reduktionsfaktor $\gamma = \dfrac{v_a}{v_a + v_i} = 0{,}8325$.

Mikrometervergrößerung $= 1{,}333 \cdot 10^{-3}\ \dfrac{\text{cm.}}{\text{Skt.}}$

$k = 1{,}37 \cdot 10^{-16}$ erg., $\alpha = 4{,}22 \cdot 10^{-24}\ \text{cm}^3$.
Länge der Zylinder: $L = 37{,}11$ cm.
Radien der Zylinder: $R_4 = 4{,}77$ cm, $R_3 = 3{,}18$ cm.
$R_2 = 2{,}96$ „ $R_1 = 1{,}485$ „

$$(V_2 - V_1)^2 = 1000 \text{ C. G. S. } \triangle v_{\text{korr.}} = \frac{\triangle v}{\gamma}.$$

Um einen Mittelwert von μ aus diesen drei Meßserien zu berechnen, wählen wir das „Gewicht" jedes der drei in der Tabelle berechneten μ der Anzahl der Einzelbeobachtungen in der Meßserie proportional. Legt man „das Gewicht" des ersten Wertes von μ 10 bei, so werden die „Gewichte" bzw. des zweiten und dritten μ 9 und 5. Der in der Weise berechnete Mittelwert von μ wird

$$\mu = 1{,}83 \cdot 10^{-18}\ \text{cm}^{\frac{5}{2}}\ \text{g}^{\frac{1}{2}}\ \text{sec}^{-1}.$$

Tabelle I.

	Temperatur T (abs.)	Querschnitt des Manometers φ cm²	Verschiebung l Skt.	Kontraktion $\triangle v$ cm³	$\triangle v_{\text{korr.}}$ cm³	Anzahl der Beobachtungen	μ $\text{cm}^{\frac{5}{2}}\ \text{g}^{\frac{1}{2}}\ \text{sec}^{-1}$
Erste Meßserie	292	$4{,}42 \cdot 10^{-3}$	47,4	$2{,}79 \cdot 10^{-4}$	$3{,}35 \cdot 10^{-4}$	53	$1{,}74 \cdot 10^{-18}$
Zweite „	292,8	$4{,}315 \cdot 10^{-3}$	56,6	$3{,}26 \cdot 10^{-4}$	$3{,}91 \cdot 10^{-4}$	45	$1{,}90 \cdot 10^{-18}$
Dritte „	292,8	$4{,}50 \cdot 10^{-3}$	51,9	$3{,}12 \cdot 10^{-4}$	$3{,}75 \cdot 10^{-4}$	26	$1{,}86 \cdot 10^{-18}$

Der nach einer ganz anderen Methode von Jona[1]) (aus der Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante) bestimmte Wert ist

$$\mu = 1{,}76 \cdot 10^{-18}.$$

Nach Messungen von Bädecker[2]) läßt sich berechnen

$$\mu = 1{,}60 \cdot 10^{-18}.$$

Ein Überschlag zeigt, daß der in dieser Arbeit bestimmte Wert $\mu = 1{,}83 \cdot 10^{-18}$ mit einem mittleren Fehler von etwa 2,7 Proz. behaftet ist. Der Unterschied zwischen dem hier bestimmten Wert und demjenigen von Jona läßt sich also erklären.

Wir wollen schließlich die Verschiebung l nach Gleichung (12) berechnen (indem wir wie früher berücksichtigen, daß E eine variable Größe ist) unter Anwendung folgender Zahlenwerte: $(V_2 - V_1)^2 = 1000$ C. G. S., Querschnitt des Mikromanometers $q = 4{,}42 \cdot 10^{-3}$ cm² (siehe Tabelle I, erste Meßserie), die während der drei Meßserien gemessenen Atmosphärendrucke bzw. $p = 1{,}012 \cdot 10^6$, $1{,}019 \cdot 10^6$ und $0{,}999 \cdot 10^6$ dyn/cm² und $\varepsilon_{292°{,}5} = 1{,}00886$ (nach Messungen von Jona, loc. cit.). Wir bekommen in den drei Fällen $l = 45{,}1$, 44,8 und 45,8 Skt.

Reduziert man andererseits die in Tabelle I angegebenen, aus den Messungen abgeleiteten Zahlenwerte für l, so daß diese dem gleichen Querschnitt wie oben ($q = 4{,}42 \cdot 10^{-3}$ cm²) entsprechen, so bekommt man bzw. $l = 47{,}4$, 55,4 und 52,9 Skt. Unter Anwendung der oben angegebenen „Gewichte" läßt sich daraus der Mittelwert $l = 51{,}5$ Skt. berechnen.

Wir stellen diese Resultate in einer Tabelle zusammen:

Tabelle II.

	„Beobachtete" Werte von l in Skt.	Berechnete Werte von l in Skt.
Erste Meßserie	47.4	45.1
Zweite „	55.4	44.8
Dritte „	52.9	45.8
Mittelwerte	$51{,}5 \pm 2{,}7$	45.2

Aus Tabelle II geht hervor, daß der „beobachtete" Mittelwert von l etwa 12,5 Proz. größer ist als derjenige, welcher sich der Theorie nach berechnen läßt.

Die Tabelle gibt zugleich an, daß die einzelnen „beobachteten" Werte ohne Ausnahme merklich größer als die berechneten sind. Es fragt sich, ob dieser Unterschied sich erklären läßt. Aus den drei „beobachteten" Werten in Tabelle II berechnet man einen mittleren Fehler von etwa 5,4 Proz. Rechnet man auch mit einem ähnlichen mittleren Fehler[1]) für den berechneten Wert von l, so läßt sich der Unterschied zwischen dem „beobachteten" und dem aus der Theorie berechneten Wert erklären.

Es wurden auch einige Versuche mit Luft ausgeführt. Da mir kein Spannungsmesser zur Verfügung stand, der höhere Spannungen als etwa 12000 Volt maß, und die Verschiebung bei Luft viel kleiner ist als bei Schwefeldioxyd, so konnten vorläufig nur qualitative Messungen ausgeführt werden. Es wurde jedenfalls konstatiert, daß die Verschiebung die richtige Richtung und Größenordnung (für $[V_2 - V_1] = 11000$ Volt eine Verschiebung auf etwa 4 Skt.) ergab.

Zusammenfassung.

Um die äußerst kleinen Kontraktionen zu messen, welche bei Elektrostriktionsversuchen in Gasen auftreten, wurde ein speziell für Gase konstruiertes Mikromanometer verwendet.

Thermische Störungen, welche sich auch unter Anwendung eines sehr guten thermischen Schutzes bemerkbar machten, wurden mittels elektrischer Ströme kompensiert.

Quantitative Messungen sind vorläufig nur mit Schwefeldioxyd angestellt.

Die nach der Theorie berechneten Verschiebungen im Mikromanometer stimmen innerhalb der erreichten Genauigkeit mit den beobachteten überein.

Auch ist auf Grund der Messungen das Dipolmoment für SO_2 berechnet worden.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Professor Dr. P. Debye für die Anregung zu dieser Arbeit bestens zu danken.

Christiania, Phys. Inst. d. Univ., 7. Juli 1921.

Zusatz bei der Korrektur.

Die Entwickelungen im theoretischen Teil setzen voraus, daß das betreffende Gas aus Einzelmolekülen besteht. Daß diese Voraussetzung für leicht kondensierbare Gase wie SO_2 in der Nähe des Kondensationspunktes (für SO_2 bis 70° C) nicht zutrifft, stellte sich heraus bei Auswertung der Resultate von Jona[2]). Die Diskrepanzen zwischen den Versuchen und der Theorie ließen sich aber nach Jona unter der Annahme beseitigen, daß das Gas bei niedrigen

1) Jona, loc. cit.
2) Bädecker, Zeitschr. f. phys. Chemie **36**, 305, 1901.

1) Bei dieser Berechnung kommen besonders die Fehler bei Bestimmung der Dielektrizitätskonstante (ε) und des Querschnittes (q) in Betracht.
2) Jona, loc. cit.

Temperaturen aus zwei Molekülarten — Einzel- und Doppelmoleküle — besteht, also Assoziationserscheinungen zeigt.

Da die Elektrostriktionsversuche bei einer Temperatur ausgeführt wurden, bei welcher sich die Assoziation bemerkbar macht, sind deshalb die im experimentellen Teil benutzten Ausdrücke (12) und (14') nur von beschränkter Gültigkeit. Die Korrektionen, welche wegen der Assoziation in Betracht kommen, sollen in einer anderen Arbeit erörtert werden, in Zusammenhang mit denjenigen Versuchen, die zurzeit für andere Gase unter Ausführung sind.

Christiania, den 9. Nov. 1921.

(Eingegangen 30. September 1921.)

VORTRÄGE UND DISKUSSIONEN DES DEUTSCHEN PHYSIKERTAGES IN JENA VOM 18.—24. SEPTEMBER 1921.

R. Seeliger, Anregung der Atome zur Lichtemission durch Elektronenstoß. IV. Verhalten der einzelnen Glieder einer Serie.

Eine Verfeinerung der in vorhergehenden Mitteilungen[1]) beschriebenen Beobachtungen über die Anregung zur Lichtemission durch den Stoß schneller Elektronen hat zu interessanten Ergebnissen über das Verhalten der aufeinanderfolgenden Glieder jeweils einer Serie geführt, die im Folgenden mitgeteilt sind. Den Herren Dr. Mierdel und Schramm bin ich für eifrige Mitarbeit, der Jagor-Stiftung für die Mittel zur Beschaffung eines Teiles der benutzten Apparate zu Dank verpflichtet.

Wie die früheren Untersuchungen gezeigt hatten, liegt das Maximum der Anregungsfunktion, d. h. die optimale Geschwindigkeit der emissionserregenden Elektronen, bei um so größeren Werten, je höherwertiger der Träger einer Linie oder Bande ist oder, was damit, soweit darüber Erfahrungen vorliegen, übereinstimmt, je höher die Anregungsspannung ist; an einem bereits recht ausgedehnten Beobachtungsmaterial hat sich dieser Zusammenhang bisher stets bestätigt. Eine willkommene Ergänzung der Aussagen über die Lage des Maximums der Anregungsfunktion läßt sich ferner entnehmen aus Beobachtungen am sogenannten Glimmsaum einer regulären Glimmentladung, wo sich gezeigt hatte, daß das Maximum der Intensität um so näher an der Kathode liegt, je höher die Optimalgeschwindigkeit (oder Anregungsgeschwindigkeit) bei Anregung durch Elektronen ist (Glimmsaumregel); wenn diese Regel auch bisher nur rein empirisch begründet werden konnte und der ganzen Sachlage nach Ausnahmen durchaus nicht unmöglich sind, geben doch auch derartige Beobachtungen jedenfalls ein bequemes und leistungsfähiges Mittel zum Studium der Anregungsverhältnisse ab[1]). Es lag nun nahe, Linien derselben Serie miteinander zu vergleichen, die sich also energetisch gesprochen nur durch den Energieinhalt, nicht durch den variablen oder konstanten Term selbst voneinander unterscheiden. Nach dem oben Gesagten sollte man erwarten, daß die Optimalgeschwindigkeit der Anregung mit steigender Gliednummer zunimmt und daß der Glimmsaum eine „Feinstruktur" zeigt, derart, daß die maximalen Intensitäten sich mit steigender Gliednummer näher an die Kathode heranschieben. Es ergab sich jedoch, um das Ergebnis gleich vorwegzunehmen, daß es zwei Arten von Serien gibt. Bei denen der ersten Art, die im Sinne der obigen Regeln ein reguläres Verhalten zeigen, nimmt die Optimalgeschwindigkeit mit steigender Gliednummer zu und es rückt das Maximum der Intensität im Glimmsaum mit steigender Gliednummer näher an die Kathode. Zu diesen gehören die Balmerserie des Wasserstoffs und die beiden Triplettnebenserien des Quecksilbers. Bei den Serien der zweiten Art dagegen zeigte sich gerade das umgekehrte Verhalten, und zwar — und dies ist wesentlich und zeigt zugleich den innigen Zusammenhang zwischen Anregungsfunktion und Glimmsaumregel — in beiden Fällen, also sowohl bei der Anregung der Elektronen wie im Glimmsaum. Serien dieser Art sind die des Heliums und die des Neons.

Die Untersuchungsmethoden sind in früheren Arbeiten bereits eingehend beschrieben; ergänzend ist nur noch hinzuzufügen, daß bei den geringen Unterschieden im Verhalten der ein-

1) Diese sind veröffentlicht in der Zeitschr. f. Phys. **1**, 355, 1920; **5**, 182, 1921; **7**, 93, 1921; dort auch Angabe der übrigen hier benutzten Arbeiten über Anregungsfunktion und Glimmsaum.

1) Vgl. dazu J. Franck, diese Zeitschr. **22**, 444 1921.

zelnen Serienglieder die Konvergenz des prismatischen Spektrums nach dem Violett zu hier nun besonders sorgfältig zu beachten und zu eliminieren ist und ferner, daß es wünschenswert schien, Gemische von Gasen, die Serien der ersten und zweiten Art liefern, zu untersuchen. Dadurch kann man ev. noch unbekannte, in Feldverzerrungen liegende Fehlerquellen, sowie Fehler bei der Durchmessung der Spektrophotogramme von vornherein ausschließen. Beschränkt durch die Unzulänglichkeit der zur Verfügung stehenden Mittel konnten von den in Betracht kommenden Gasen Wasserstoff, Quecksilber, Helium, Neon nicht alle im Glimmsaum und bei Elektronenanregung untersucht werden; die folgenden, unseren Mitteln zugänglichen Einzeluntersuchungen und Kombinationen scheinen mir aber die erhaltenen Resultate bereits sicherzustellen:

Elektronenstrahl	Glimmsaum
Wasserstoff	Wasserstoff
Helium	Helium
$(H_2 + He)$-Gemisch	$(H_2 + He)$-Gemisch
	Quecksilber
	$(H_2 + Hg)$-Gemisch
	$(He + Hg)$-Gemisch
	Neon
	$(Ne + He)$-Gemisch

Wie die Tabelle zeigt, war damit ein Anschluß der einzelnen Gase aneinander gewährleistet. Im einzelnen wurden die folgenden Serienglieder untersucht, die in Rücksicht auf die relativen Intensitäten so ausgewählt werden mußten, daß die vergleichenden Linien auch zugleich, also auf derselben Platte, im Gebiet brauchbarer Schwärzung lagen.

Wasserstoff:	H_α H_β H_γ H_δ	
Helium:	HS	5, 6 Glied
	$1NS$	3, 4, 5, 6 Glied
	$2NS$	3, 4, 5 Glied
Parhelium:	HS	3, 4 Glied
	$1NS$	4, 5, 6 Glied
	$2NS$	4, 5, 6 Glied
Quecksilber:	1 Tr. NS	3, 4, 5 Glied
	2 Tr. NS	1, 2, 3 Glied
Neon:	$1NS\ 2p_8 - md_4$	2, 4, 5 Glied
	$1NS\ 2p_9 - md_4'$	2, 3, 4, 5 Glied
	$2NS\ 2p_{10} - ms_5$	2, 3, 4 Glied
	$2NS\ 2p_{10} - ms_4$	1, 3, 5 Glied

Aus dem umfangreichen Beobachtungsmaterial sollen als Beleg nur einige der Schwärzungskurven reproduziert werden. Für den Glimmsaum sind stets die Entfernungen von der Kathodenoberfläche in mm angegeben. Für den Verlauf der Anregungsfunktion geben die Abszissen den Abstand von der positiven Platte des verzögernden Feldes (Anode der Hauptentladung); beigegeben ist die Potentialdifferenz V_0 im ganzen verzögernden Feld, dessen Länge stets 3,6 cm betrug. Man kann daraus unter der Annahme linearen Feldverlaufs die zu den Abszissenwerten gehörenden Geschwindigkeiten der Elektronen in Volt angeben. Mehr als die Größenordnung wird man aus diesen Werten jedoch nicht entnehmen dürfen, da ohne Zweifel beträchtliche Feldverzerrungen durch Raumladungen auftreten[1]).

Wasserstoff. Als Beispiel diene die in Fig. 1 wiedergegebene Aufnahme der Anregungs-

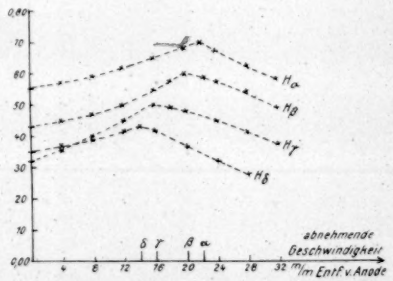


Fig. 1.

funktion. Geschwindigkeit der Elektronen bei Eintritt in das Feld 200 Volt, Gegenkathode verbunden mit der Kathode, also $V_0 = 200$ Volt, 1 mm im Feld = 5,6 Volt. Ein Beispiel für die Verhältnisse im Glimmsaum gibt Fig. 2 für ein

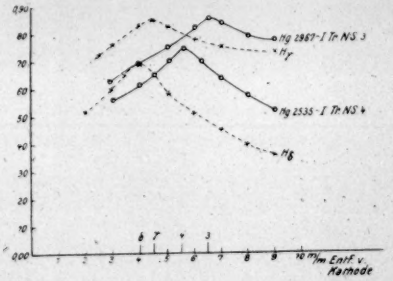


Fig. 2.

Gemisch von Hg und H_2. Spannung an der Röhre etwa 3000 Volt. Nebenbei sei noch hingewiesen auf die Erfüllung der Glimmsaumregel

1) Vgl. dazu Mitteilung III a. a. O.

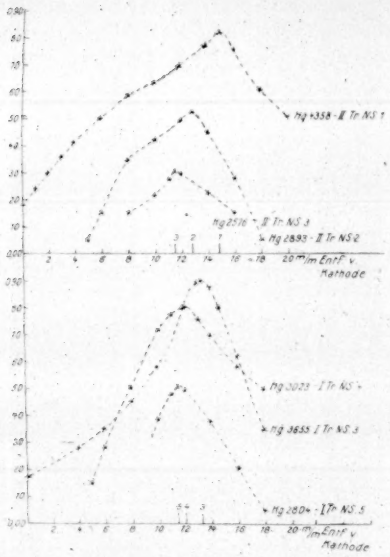


Fig. 3.

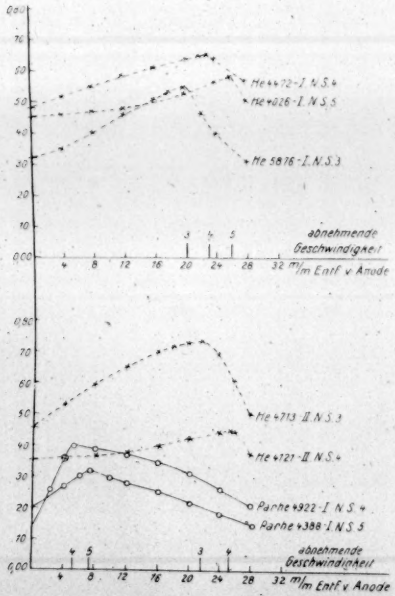


Fig. 4.

bezüglich der Grobstruktur, wie sie in der verschiedenen Lage der Maxima der *H*- und *Hg*-Linien zum Ausdruck kommt.

Quecksilber. Außer den Fig. 2 und 6 seien noch zwei in reinem *Hg* erhaltene Aufnahmen des Glimmsaums gegeben (Fig. 3); bemerkt sei dazu, daß die Maxima der Komponenten jeweils eines Gliedes an derselben Stelle zu liegen scheinen.

Helium. Helium zeigt, wie bereits oben bemerkt, nun gerade das umgekehrte Verhalten, und zwar sowohl in der Anregungsfunktion wie im Glimmsaum. Als Beispiele dafür seien von den Aufnahmen im reinen Gas die in Fig. 4 gegeben, die sich auf die Anregungsfunktion bezieht. Geschwindigkeit der Elektronen beim Eintritt in das Feld 400 Volt, Gegenkathode verbunden mit Kathode, also $V_0 = 400$ Volt, 1 mm im Feld = 11 Volt. Überzeugender sind noch die Ergebnisse an Gasgemischen, von denen die Fig. 5 und 6 eine Auswahl geben. Fig. 5

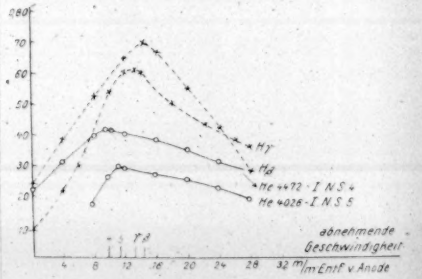


Fig. 5.

bezieht sich auf die Anregungsfunktion in einem Gemisch von *He* und H_2 unter denselben Bedingungen wie bei Fig. 4. Die Fig. 6 zeigt

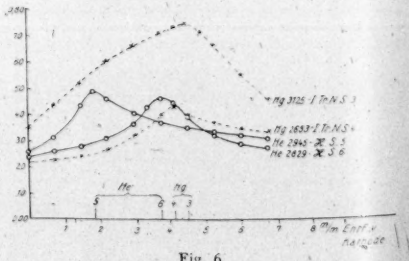


Fig. 6.

den Intensitätsverlauf im Glimmsaum, und zwar in einem *He*—*Hg*-Gemisch bei einem Kathodenfall von 3000 Volt.

Neon. Die Verhältnisse in Neon konnten nur im Glimmsaum untersucht werden und sind in einem Beispiel in Fig. 7 gegeben.

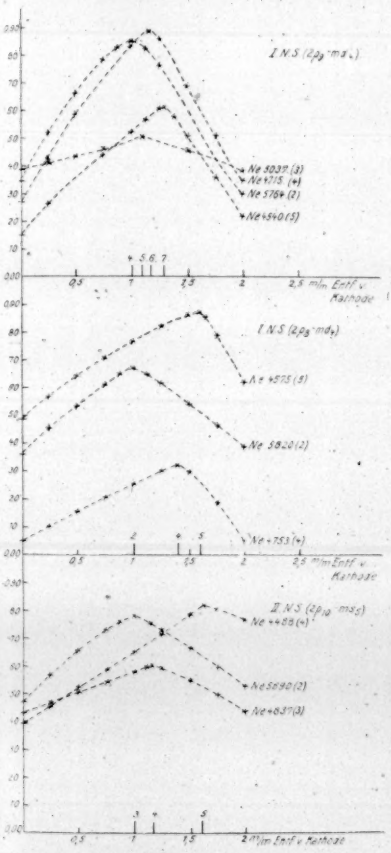


Fig. 7.

Mit der Feststellung, daß es hinsichtlich der Lage des Maximums der Anregungsfunktion, d. h. der optimalen Anregungsgeschwindigkeit, zwei Arten von Serien gibt, ist für die Beurteilung der ganzen Verhältnisse ein neuer Gesichtspunkt gewonnen, der in den vorhergehenden Arbeiten noch nicht berücksichtigt werden konnte. Die Regel, daß mit der Anregungsspannung einer Frequenz die optimale Anregungsgeschwindigkeit steigt und im Glimmsaum das Maximum der Intensität näher an die Kathode rückt, wurde stets gewonnen an Frequenzen mit verschiedenen Trägern bzw. mit verschiedenen Niveaus der Terme in der graphischen Darstellung von Bohr[1]). Sie gilt nach den obigen Feststellungen nicht mehr allgemein für Frequenzen derselben Serie, also desselben Trägers bzw. desselben Termniveaus; wieweit dadurch auch ihre erstgenannte Fassung einzuschränken ist, können erst neue Versuche zeigen, die diese Komplikation berücksichtigen in der Auswahl der miteinander zu vergleichenden Frequenzen verschiedener Serien. Von besonderem theoretischen Interesse wird es aber sein, Linien miteinander zu vergleichen, die in der quantentheoretischen Deutung zu derselben Anfangsbahn, jedoch zu verschiedenen Endbahnen gehören. Für alle zu einer solchen Gruppe gehörenden Linien müßte die Anregungsfunktion das Maximum an derselben Stelle haben.

Diskussion.

Es fand eine Diskussion zwischen den Herren Franck, Hertz und Seeliger statt, die zu folgendem Ergebnis führte: Die nach der Methode des Elektronenstoßes gewonnenen Ergebnisse zusammen mit den Resultaten dieser Arbeit sprechen für einen Verlauf der Anregungsfunktion derart, daß an der Stelle der Anregungsspannung ein erstes Maximum liegt, wonach die Ausbeute herabsinkt, um später zu einem zweiten Maximum bei der beobachteten Optimalspannung wieder anzusteigen.

1) N. Bohr, Zeitschr. f. Phys. **2**. 434, 1920.

C. Ramsauer (Danzig), Über den Wirkungsquerschnitt der Edelgase gegenüber langsamen Elektronen[1]).

Bei dem Vergleich zwischen dem gesamten Wirkungsquerschnitt und dem absorbierenden Querschnitt der Gasmoleküle gegenüber langsamen Elektronen[2]) hatte ich gefunden, daß der Wirkungsquerschnitt des Argonatoms bei 1,1 Volt Elektronengeschwindigkeit außerordentlich klein ist und mit abnehmender Geschwindigkeit noch weiter sinkt. Diese Tatsache ist so überraschend und andererseits so wichtig, daß eine gründliche Nachprüfung erforderlich erschien.

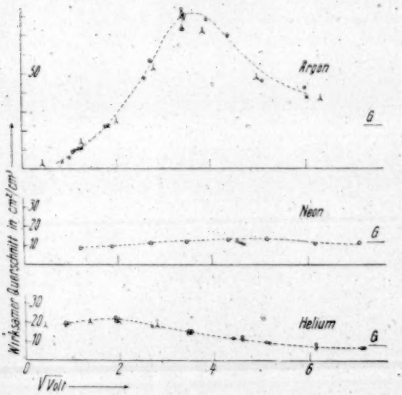
Die Versuchsanordnung entspricht im Prinzip der bisher benutzten Anordnung mit dem

1) Die ausführliche Darstellung dieser Arbeit wird in den Annalen der Physik erscheinen, worauf betreffs der Versuchsanordnung, der Literaturangaben usw. hiermit verwiesen sei.

2) Vgl. den vorjährigen Vortrag. Diese Zeitschr. **21**. 576—578, 1920.

Unterschied, daß die Elektronen durch ein elektrisches Feld beschleunigt werden können, und daß sie unter dem Einfluß der magnetischen Kraftlinien sich alle auf ein und demselben Kreisbogen bewegen, wobei der Wegunterschied dadurch erzeugt wird, daß die Elektronen bis zu ihrer Auffangung entweder $^1/_2$ Kreisumfang oder $^3/_4$ Kreisumfang zurücklegen müssen. Die Versuche wurden auf die drei Edelgase Helium, Neon und Argon ausgedehnt.

Die erhaltenen Resultate lassen sich in folgende Hauptsätze zusammenfassen (vgl. Figur):



1. Geht man von höheren Werten der Elektronengeschwindigkeit, z. B. 50 Volt, zu immer kleineren und kleineren Werten über, so steigt zuerst der Wirkungsquerschnitt, erreicht ein Maximum und sinkt dann wieder ab. Dies gilt für alle drei Gase, tritt aber bei Argon bei weitem am stärksten hervor, indem hier dem sehr hohen Maximum eine sich dem Nullwert nähernde Abnahme gegenübersteht. Dies bedeutet, daß ein Elektron kleinster Geschwindigkeit das Argonatom fast überall frei passieren kann, ohne absorbiert oder reflektiert zu werden und ohne eine für die benutzte Versuchsanordnung meßbare Änderung in Richtung oder Geschwindigkeit zu erleiden.

2. Die Versuchswerte bei Argon werden nicht geändert, wenn dem Argon Sauerstoff in erheblicher Menge beigemischt wird: vgl. die drei mit einem × bezeichneten Werte.

3. Die Versuchswerte bei Argon werden nicht geändert, wenn man die Gasdrucke aufs äußerste variiert. Die oberen vier Punkte bei 12 Volt entsprechen einer Mengenverminderung der Elektronen auf dem $^3/_4$-Kreis zwischen 2/3 und 269/270. Selbst im letzten Falle behält die magnetische Verteilungskurve (die aufgefangene Menge der Elektronen als Funktion des Magnetfeldes) vollständig ihre Form, d. h. die schließlich aufgefangenen Elektronen sind ohne jede Beeinflussung durch die große Anzahl der Gasmoleküle hindurchgegangen.

4. Der Vergleich mit dem absorbierenden Querschnitt (siehe λ bei Argon und Helium) nach Herrn H. F. Mayer zeigt, daß der Wirkungsquerschnitt und der absorbierende Querschnitt einander bei diesen kleinsten Geschwindigkeiten gleich sind, was bekanntlich bei höheren Geschwindigkeiten durchaus nicht der Fall ist. Das Elektron wird also bei einem Zusammenstoß entweder völlig aus dem Strahle ausgeschieden, nämlich echt oder unecht absorbiert (reflektiert), oder es erleidet überhaupt keine für diese Versuchsanordnung merkliche Einwirkung, nämlich keine Richtungsänderung und keine Geschwindigkeitsänderung, von welch beiden die erstere bei höheren Strahlgeschwindigkeiten sich in ganz überwiegendem Maße bemerkbar machen würde. Die Übereinstimmung mit den Mayerschen Werten kann gleichzeitig in gewissem Maße als Bestätigung des hier gefundenen experimentellen Verlaufs selbst dienen.

5. Der Vergleich mit den gaskinetischen Querschnitten (vgl. die mit G bezeichneten Marken) zeigt bei den drei Gasen ein individuelles Verhalten.

In dieser Beziehung werde noch kurz auf die vorjährige Diskussion eingegangen. Herr Franck wies damals betreffs Wasserstoff und Helium auf seine früheren Versuche hin, bei welchen der absorbierende Querschnitt durchaus dem gaskinetischen entsprochen hatte, so daß die von mir gefundenen mehr als drei- und zweimal so großen Werte als bedenklich erscheinen mußten. Demgegenüber seien in der folgenden Tabelle alle bisher bekannten Verhältnisse des absorbierenden Querschnitts zum gaskinetischen Querschnitt zusammengestellt.

	H_2 ($<$ 6 Volt)	H_2 ($=$ 6 Volt)
Lenard	3,8	—
Robinson	3,4	2,3
H. F. Mayer	3,8	2,3
Ramsauer	3,6	2,5
Franck u. Hertz . .	1,2	0,7

Eine Erklärungsmöglichkeit für das Herausfallen des letzten Wertes scheint mir darin zu liegen (wie an der Tafel näher erläutert wurde), daß bei der Franck-Hertzschen Anordnung die Elektronenwege im Vergleich zum Radius der Auffangeplatte außerordentlich viel kleiner sind als beispielsweise bei Herrn Mayer. Hieraus folgt aber, daß auch reflektierte Elektronen mit

zur Messung gelangen, während dies bei Herrn Mayer nicht der Fall ist und nach der Lenard-schen Definition auch nicht der Fall sein darf.

Diskussion.

Hertz: Der Herr Vortragende hat bei seiner Erklärung die Wirkung des Gegenfeldes am Empfänger des von Herrn Franck und mir benutzten Apparates nicht berücksichtigt, welches bewirkte, daß solche Elektronen, deren Bewegungsrichtung durch Zusammenstöße geändert war, nicht auf die Auffangeplatte gelangen konnten.

Ramsauer: Wenn ich auch zugeben muß, daß hiernach einmalige Reflexion nicht in Betracht kommt, so halte ich doch bei der Kleinheit der Strahllänge und bei der Höhe des Gasdrucks, wie sie aus den Einzelheiten der Veröffentlichungen von Franck und Hertz hervorgehen, auch mehrmalige Reflexionen für genügend wahrscheinlich, um das Resultat ganz wesentlich zu beeinflussen. Im übrigen kam es mir bei diesen letzten Bemerkungen in der Hauptsache darauf an, zu zeigen, daß meine Werte durchaus nicht aus den bisherigen Beobachtungen herausfallen.

Lenard: Es ist sehr bemerkenswert, daß die Messungen wohldefinierter Absorptionskoeffizienten von Lenard, Robinson, Franz Mayer und Ramsauer, obgleich letztere nach gänzlich veränderter Methode ausgeführt sind, so gut übereinstimmen, während die Messungen von Franck uud Hertz, welche keine strenge Definition des zu Messenden zugrunde legen, davon gänzlich abweichen.

R. Bär (Zürich), Über die scheinbaren Unterschreitungen des elektrischen Elementarquantums.

§ 1. Ich möchte über einige neue Ergebnisse meiner Arbeit berichten, die zum Ziel hat, aufzuklären, welche Ursachen die scheinbaren Unterschreitungen der Elektronenladung bei den Ehrenhaftschen Ladungsmessungen veranlassen.

In einer kürzlich erschienenen Notiz[1]) konnten Herr F. Luchsinger und ich zeigen, daß die Ehrenhaftsche Methode so lange richtige Werte für die Elektronenladung ergibt, als ihre Voraussetzungen richtig sind. Von diesen Voraussetzungen geben namentlich zwei zu Bedenken Anlaß: 1. die Gültigkeit des Stokes-Cunningham-schen Widerstandsgesetzes und 2. die Annahme, daß die untersuchten Partikeln dieselbe Dichte σ haben wie das Material, aus dem sie hergestellt wurden.

Das erwähnte Fallgesetz postuliert zwischen der Fallgeschwindigkeit v des Teilchens im Gase und der mittleren freien Weglänge l der Gasmoleküle eine lineare Beziehung

$$v = \alpha + \beta l. \qquad (1)$$

Die Konstanten α und β, die von uns durch Messung der Fallgeschwindigkeit des Teilchens bei zwei verschiedenen Gasdrucken bestimmt wurden, sind unter anderm auch vom Teilchenradius abhängig, dagegen ist die Kombination $\frac{\beta^2}{\alpha}$ davon unabhängig, und zwar wird, falls in Stickstoff beobachtet wird,

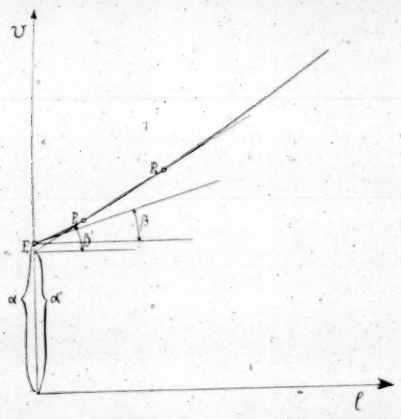
$$\frac{\beta^2}{\alpha} = 1{,}20 \cdot 10^6 \sigma A^2, \qquad (2)$$

worin Ehrenhaft für A den Wert 0,815 annimmt.

Es müßte also bei Versuchen mit Teilchen aus einem und demselben Material die Größe $\frac{\beta^2}{\alpha}$ eine Konstante C sein. Wird das aus dem Versuch ermittelte $\frac{\beta^2}{\alpha} < C$, so kann man annehmen, daß die Dichte um so viel kleiner ist. Dieser Fall trat bei unsern Experimenten, die mit durch Verdampfung erzeugten *Se*-Partikeln ausgeführt wurden, bei den größeren Teilchen hin und wieder ein. Die kleineren Teilchen zeigten aber gerade das entgegengesetzte Verhalten. Je kleiner das untersuchte Teilchen war, desto größer wurde der Wert von $\frac{\beta^2}{\alpha}$. Da man nicht wohl annehmen kann, daß die Dichte dieser kleinen Partikeln wesentlich größer sei als die des Ausgangsmaterials, so mußte der Grund für das Größerwerden des $\frac{\beta^2}{\alpha}$ in dem Nichtzutreffen des verwendeten Widerstandsgesetzes für diese kleinen Teilchen gesucht werden.

§ 2. Ich habe daher das Widerstandsgesetz an diesen kleinen Partikeln nochmals experimentell geprüft, indem ich die Fallgeschwindigkeit desselben Teilchens bei möglichst vielen Gasdrucken bestimmte. Dabei zeigte sich in der Tat, daß der Zusammenhang zwischen Fallgeschwindigkeit und freier Weglänge kein linearer mehr war, sondern ein solcher, wie er vom Knudsen-Weberschen Fallgesetz gefordert wird und wie ihn die Kurve in der Figur darstellt. Bestimmt man aus dieser Kurve die Konstanten α und β, indem man das Stokes-

1) Diese Zeitschr. **22**, 225, 1921.



Cunninghamsche Gesetz als erste Näherung des Knudsen-Weberschen auffaßt, d. h. indem man die Tangente an die Kurve im Punkt P_0 legt, so erhält man die richtigen Werte α und β. Bestimmt man die Konstanten aber dadurch, daß man das Stokes-Cunninghamsche Gesetz durchaus und nicht nur in erster Näherung als gültig voraussetzt und dementsprechend durch die Punkte P_1 und P_2 — in denen die Fallgeschwindigkeit experimentell bestimmt wurde — eine Grade legt, wie es Luchsinger und ich zur Prüfung der Ehrenhaftschen Voraussetzungen tun mußten, so erhält man die falschen Werte $\alpha' < \alpha$ und $\beta' > \beta$, also wird erst recht $\frac{\beta'^2}{\alpha'} > \frac{\beta^2}{\alpha}$.

Berechnet man nun Größe und Ladung der *Se*-Partikeln mit den richtigen Werten von α und β, so zeigt sich auch bei den kleinsten Teilchen mit einem Radius von ca. $5 \cdot 10^{-6}$ cm keine wesentliche Ladungsunterschreitung, trotzdem zur Messung immer die Partikeln mit den kleinsten Ladungen ausgesucht wurden. Dieses Resultat steht in voller Übereinstimmung mit einer neuen Untersuchung von E. Schmid[1]), die im Ehrenhaftschen Institute ausgeführt wurde und bei der unter Anwendung des Knudsen-Weberschen Widerstandsgesetzes auch keine Subelektronen an Selen-Partikeln aufgefunden werden konnten.

§ 3. Weitere Versuche wurden an Platinteilchen angestellt, die durch einen Wechselstromfunken zwischen *Pt*-Elektroden erzeugt wurden. Diese Teilchen zeigen nun ein ganz anderes Verhalten. Sie haben, wenn man annimmt, daß ihre Dichte die des *Pt* ist, einen Radius bis herab zu $2 \cdot 10^{-6}$ cm und sie zeigen Ladungen bis herab zu $6 \cdot 10^{-12}$ elst. E. Bei diesen Teilchen nimmt aber $\frac{\beta^2}{\alpha}$ mit abnehmendem Teilchenradius nicht zu wie bei den *Se*-Teilchen, sondern ab bis auf den 100ten Teil des theoretischen Wertes. Man muß also annehmen, daß die Dichte dieser Partikeln sehr viel kleiner ist als die des *Pt* (bis herab zu 0,2 statt 21,4). Infolge dieser kleinen Dichte wird der wirkliche Teilchenradius so groß, daß das Stokes-Cunninghamsche Widerstandsgesetz angenähert gültig bleibt, so daß der Umstand, der die Vergrößerung von $\frac{\beta^2}{\alpha}$ bei den *Se*-Partikeln bewirkte, hier keine wesentliche Rolle spielt. Ich glaube, daß diese kleine Dichte nicht zu erklären ist durch eine adsorbierte Gasschicht, wie dies verschiedentlich vermutet wurde, sondern eher durch eine schwammartige Struktur der Teilchen. Dafür spricht unter anderm auch die große Unregelmäßigkeit des Phänomens.

Rechnet man nun die Ladung der Teilchen aus mit den experimentell ermittelten Dichten, statt mit dem Wert 21,4, so erhält man bei allen untersuchten Teilchen Werte für die Elektronenladung, die nur noch zwischen $2-6 \cdot 10^{-10}$ elst. E. schwanken. Insbesondere zeigt sich bei dieser Berechnungsweise der Ladung keine Spur mehr von jener unerklärlichen Erscheinung, daß die Partikeln umso kleinere Ladungen tragen sollen, je kleiner ihr Radius ist.

§ 4. Um an möglichst verschiedenartigem Material Ladungsmessungen durchzuführen, habe ich nach Platin (Dichte 21,4) Paraffinteilchen (Dichte des verwendeten Paraffins 0,879), die durch vorsichtiges Verdampfen von Paraffin erzeugt wurden, untersucht. Bei diesen Partikeln ergaben sich für die Ladungen Werte, die beträchtlich größer waren als die Elektronenladung, gleichzeitig war aber der Wert von $\frac{\beta^2}{\alpha}$ größer, als er der Theorie nach sein sollte. Da der Grund, der bei den kleinsten *Se*-Teilchen diese Vergrößerung von $\frac{\beta^2}{\alpha}$ bewirkte, nämlich die Ungültigkeit des Stokes-Cunninghamschen Gesetzes, hier noch nicht wirksam sein konnte (diese Teilchen hatten einen Radius von $2-3 \cdot 10^{-5}$ cm), so muß man schließen, daß die Konstante A in (2) hier einen größeren Wert als 0,815 hat. Dadurch wird dann auch die Ladung ungefähr auf den richtigen Wert verringert. Ich glaube, daß dieser zu kleine

1) Wien. Akad. Ber. IIa, 129, 813, 1920 und Zeitschr. f. Phys. 5, 27, 1921.

Wert von A auch bei den Ehrenhaftschen Messungen an Ölpartikeln zu große Werte für die Ladung vortäuscht und daß dies mit ein Grund ist, warum Ehrenhaft findet, daß sich aus der Brownschen Bewegung bei Ölteilchen kleinere Ladungen ergeben als aus dem Widerstandsgesetz.

§ 5. Alle erwähnten Versuche wurden in einem Kondensator von 16 mm Plattendurchmesser ausgeführt. Um aber die Verhältnisse bei den Ehrenhaftschen Ladungsmessungen möglichst vollkommen zu reproduzieren, verwende ich jetzt einen Kondensator von nur 9 mm Plattendurchmesser. Über diese Versuche möchte ich einstweilen nur zwei Bemerkungen machen:

1. In diesem Kondensator kann man natürlich noch viel kleinere Teilchen sehen als in dem zuerst verwendeten, aber alle diejenigen, die infolge ihrer Kleinheit nur im zweiten Kondensator zu sehen sind, haben eine so große Brownsche Bewegung, daß Ladungsmessungen an ihnen nicht ausführbar sind. Infolgedessen scheint mir die Verwendung eines solchen Kondensators für Ladungsmessungen keine Vorteile zu bieten.

2. Die Tatsache, daß die Ladungen der Partikeln nicht kleiner werden, wenn man immer kleinere Teilchen beobachtet, findet hier eine weitere, wenigstens qualitative Bestätigung. Es zeigt sich nämlich, daß die erwähnten kleinsten Partikeln immer entweder gar keine Ladung tragen oder dann eine so große, daß sie durch ein elektrisches Feld, das die größeren Teilchen nur langsam bewegt, mit großer Geschwindigkeit an die Kondensatorplatten gezogen werden.

Diskussion.

R. Fürth: Die Frage ist nach den Ausführungen des Herrn Bär derzeit die, ob die Dichte, oder das Fallgesetz der Teilchen unrichtig ist, wenn man eine reinliche Scheidung dieser beiden Möglichkeiten vornehmen will. Es scheint mir nun durchaus möglich, diese Scheidung vorzunehmen einerseits durch genaue experimentelle Ermittlung des Fallgesetzes durch Wiederholung der Versuche von Herrn Roux, andererseits durch eine gesonderte Bestimmung der Dichte der Partikel, Versuche, die von Herrn Bär und mir in der nächsten Zeit angestellt werden sollen.

Ehrenhaft: Ich habe schon vor einem Jahre darauf hingewiesen, daß das Ergebnis solcher Versuche, wie sie Herr Bär ausführt, nicht die Dichte der Probekörper, sondern das Produkt des Quadrates des Cunninghamschen Faktors A in die Dichte der Probekörper, also $A^2 s$ ist. Demnach schlagen geringe Änderungen des A in der Dichte außerordentlich aus.

Es scheint mir nun prinzipiell höchst gewagt, das Korrektionsglied des Stokesschen Gesetzes überhaupt zu einer Dichtebestimmung heranzuziehen, da eine präzise experimentelle Festlegung des Korrektionsgliedes des Widerstandsgesetzes für den Fall kleiner Kugeln im Gase wegen der außerordentlichen experimentellen Schwierigkeiten bisher noch nicht ausgeführt werden konnte. Ich habe mich deshalb stets mit der Konstatierung der Tatsache begnügt, — wie aus meinen Abhandlungen in den Jahren 1910, 1914 und 1918 entnommen werden kann, — daß unter Verwendung jedes der Widerstandsgesetze, die man zur Begründung der Elektronentheorie heranzog (Stokes, Stokes-Cunningham, Knudsen-Weber usw.) und unter Voraussetzung der Dichte des molaren Materiales der Probekörper sich bei allen Substanzen weitgehende Unterschreitungen des Elektronenwertes ergeben. Seit der ausführlichen Diskussion über die Elektronenfrage am Nauheimer Naturforschertag 1920 anläßlich meines Vortrages über die Arbeit von mir und Konstantinowsky „Über die Atomistik der Elektrizität und die Erscheinungen an einzelnen radioaktiven Probekörpern der Größenordnung 10^{-5} cm“ hat sich in diesen Fragen nichts mehr geändert.

Das Stokessche Gesetz setzt voraus, daß das Gas an der Kugel haftet, das Cunninghamsche setzt voraus, daß das Gas an der Oberfläche zum Teil gleitet. Die Arbeit, die jetzt noch zu leisten ist, ist die rein experimentelle Ermittlung eines Widerstandsgesetzes, das jedoch von jeder Annahme über die atomistische Konstitution der Elektrizität unabhängig gewonnen werden muß und für die zur Zeit die Vorarbeiten in Wien geleistet werden. Dieses experimentell ergründete Widerstandsgesetz dürfte sich in Konsequenz der Untersuchungen ergeben, über die Konstaninowsky voriges Jahr in Nauheim berichtete. Dabei ist experimentell zu ermitteln, ob überhaupt beziehungsweise wieviel verdichtete Gasschichten betragen können. An Edelmetallen in inerten Gasen (z. B. Gold in Argon) werden dieselben wohl überhaupt nicht ins Gewicht fallen. Gleichwohl gibt es Unterschreitungen des Elementarquantes an solchen Kugeln.

Schon 1910 habe ich darauf hingewiesen, daß man für Goldkugeln die Dichte $^1/_2$ einsetzen müßte, um wieder zum Werte des Elementarquantums zu gelangen. Annahmen jedoch, daß Platinkugeln tatsächlich $^1/_5$ der Dichte des Wassers haben sollen, damit man wieder zum Werte des Elementarquantes gelangt,

scheinen mir unhaltbar. Wesentliche Abweichungen von der Dichte des kompakten Materiales auch an kleinen Kugeln scheinen mir, wie ich mehrfach hervorgehoben habe, schon deshalb ausgeschlossen, weil die optische Größenbestimmung bei einer Reihe von Materialien zu sehr schönen Übereinstimmungen geführt hat und weil das lichtpositive photophoretische Maximum an Silberkugeln, wofern die lichtpositive Photophorese an Silber durch den Luftdruck bedingt ist, zur richtigen Dichte der Silberkugel führt.

Lenard bemerkt, daß nach seiner in den Ann. d. Phys. 1919 u. 1920 veröffentlichten zusammenfassenden theoretischen Untersuchung der Widerstandsgesetze (aller Partikelgrößen) diese Gesetze in guter Annäherung als genügend bekannt und durch die Erfahrung kontrolliert angesehen werden können. Die vom Vortragenden auf Anfrage angegebenen, von ihm angenommenen Unsicherheiten der Konstante A erscheinen danach nicht allzu groß. Verringerte Dichten können natürlich bei hohlen Partikeln stets vorkommen. Ein Widerspruch gegen die Erklärungen des Vortragenden scheint also nach keiner Richtung hin zu bestehen.

Ehrenhaft: Im übrigen begrüße ich es als wesentlichen Fortschritt, daß nunmehr der experimentelle Tatbestand zugegeben und die Unterschreitungen — immer berechnet unter Zugrundelegung des Widerstandsgesetzes — auch von anderen Autoren angegeben werden.

Gerlach: Edgar Meyer und ich haben 1915 bereits ausführlich auf den Zusammenhang zwischen Widerstandsgesetz und Größe des Elementarquantums hingewiesen. Dies zur Berichtigung der Worte des Herrn Ehrenhaft, daß bisher Subelektronen noch nicht als Versuchsergebnisse von anderen zugegeben worden seien.

Ehrenhaft: Sie haben dies zugegeben, aber viele andere Autoren nicht; so z. B. wurden die Unterschreitungen an Hg-Kügelchen, die durch Verdampfung hergestellt waren, negiert.

G. Borelius (Lund), Die thermoelektrischen Temperaturfunktionen.

Während in den letzten Jahrzehnten die Temperaturfunktionen einer Reihe thermischer und elektrischer Erscheinungen in ihren allgemeinen Zügen aufgeklärt worden sind, ist eine allgemeinere Aufklärung der thermoelektrischen Temperaturfunktionen gänzlich zurückgeblieben. Ich möchte hier über einen Vorstoß in der Richtung, wo ich glaube, daß die beste Übersichtlichkeit zu gewinnen ist, kurz mitteilen.

Ich schicke voraus, daß ich die von der Thomsonschen Theorie geforderten thermodynamischen Beziehungen zwischen zwei und zwei der thermoelektrischen Größen, Thermokraft, Peltierwärme und Thomsonwärme als sehr angenähert gültig ansehen muß, wobei ich mich teils auf eigene Messungen stützen kann.

Es genügt also, einen der Effekte näher zu untersuchen, um auch über die Temperaturfunktionen der übrigen klar zu werden. Dabei empfiehlt sich aus mehreren Gründen in erster Linie der Thomsoneffekt. Dieser ist z. B. der einzige Effekt, der direkt für ein einziges Metall und nicht für ein Thermopaar beobachtet wird.

Besonders interessant ist natürlich das tiefe Temperaturgebiet. Für die Messung der Thomsonwärme bei tiefen Temperaturen war es aber notwendig, eine neue Meßmethode zu entwickeln, denn die gewöhnliche bekannte Differentialmethode, mit der fast das ganze von früher vorliegende Zahlenmaterial betreffend Thomsonwärme gewonnen ist, ist hier kaum verwendbar und auch sonst wegen gefährlicher Fehlerquellen unbequem.

Bei der neuen Methode, die ich benutzt habe, wird durch einen Metalldraht ein Strom von solcher Stärke gesandt, daß die Temperatur der Drahtmitte um einige Zehner Grad über die konstant gehaltene Temperatur der Enden ansteigt. Mit einem Thermoelemente, das etwa 0,2 der Drahtlänge von dem einen Ende angebracht ist, wird teils die Temperaturerhöhung t in diesem Punkte, teils die bei Stromumkehrung auftretende, vom Thomsoneffekt herrührende, Temperaturänderung τ beobachtet. Der Thomsoneffekt berechnet sich dann von Korrektionsgrößen abgesehen, aus

$$\sigma = \frac{3q}{y} \cdot \frac{\lambda}{s} \cdot \frac{\tau}{t},$$

wo q Drahtquerschnitt, y Abstand des Thermoelementes von der Drahtmitte und s Stromstärke bedeutet. λ ist die spezifische Wärmeleitfähigkeit, die jetzt für eine Reihe von Metallen für unseren Zweck mit hinreichender Genauigkeit bekannt ist.

Bei der experimentellen Anordnung, mit der ich zusammen mit Herrn Gunnesson gearbeitet habe, wird der Draht auf eine Kupferscheibe montiert. Die Scheibe wird unten an einem Kupferzylinder angeschraubt, der mit einem den Draht umgebenden Kupfermantel versehen ist. In einer Ausbohrung in diesem Zylinder endet ein langes dünnes Messingrohr, worin flüssige Luft, Kohlensäureschnee, Eis oder Wasserdampf eingeführt werden. Die inneren Teile sind durch ein Vakuumgefäß umgeben.

Die Messungen sind teils bei konstanten Temperaturen, teils unter Gang der Temperaturen

vorgenommen. Für nähere Beschreibung von Anordnungen und Messungen muß auf eine in diesen Tagen erschienene Arbeit in den Annalen der Physik verwiesen werden.

Die Resultate sind für Metalle, die zu derselben Gruppe des periodischen Systemes gehören, sehr ähnlich. Bei *Cu*, *Ag* und *Au* in der ersten Gruppe des Systems steigen die Kurven von, jedenfalls bei *Cu* und *Ag*, negativen Werten bei den tiefsten Temperaturen erst schnell in dem Temperaturgebiete, wo auch z. B. spezifische Wärme und Ausdehnungskoeffizient stark zunehmen, um bei höheren Temperaturen linear mit der Temperatur zu wachsen. Die Pfeile der Figur geben die aus der spezifischen Wärme berechneten charakteristischen Temperaturen an.

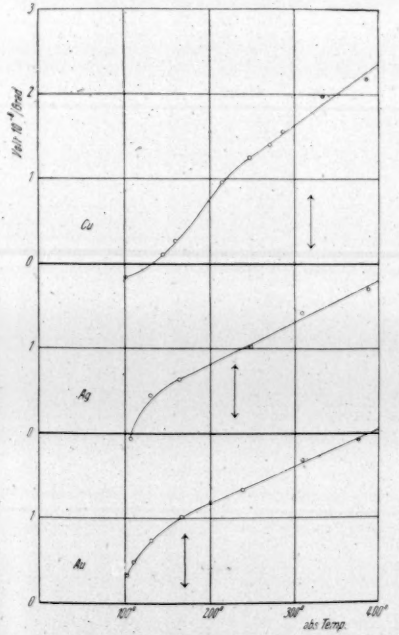


Fig. 1.

Bei *Zn* und *Cd* findet man oberhalb der charakteristischen Temperaturen einen sehr starken Gang nach dem Positiven hin. Die Messungen reichen noch nicht aus, um die für ganz tiefe Temperaturen gültigen Gesetzmäßigkeiten zu entschleiern.

Bei *Sn* und *Pb* in der vierten Gruppe des

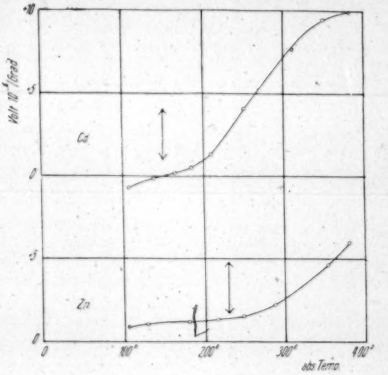


Fig. 2.

Systemes sind die charakteristischen Temperaturen so klein, daß die Messungen nur die Verhältnisse bei relativ hohen Temperaturen zeigen. Beide Kurven gehen in ähnlicher Weise nach dem Negativen hin.

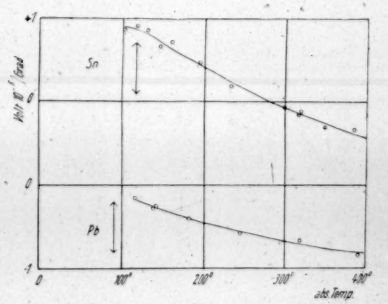


Fig. 3.

Die Resultate für Blei sind besonders interessant. Der Thomsoneffekt des Bleis wird nämlich immer in der Literatur als bei Zimmertemperatur sehr klein angegeben und das Blei ist deshalb oft als thermoelektrisches Bezugsmetall benutzt worden. Cermak fand eine von Null bei Zimmertemperatur bis + 1 Mikrovolt pro Grad bei 300° C steigende Kurve. Unsere Resultate sind damit unverträglich. Wir haben bei drei verschiedenen sehr reinen Bleisorten übereinstimmende Resultate bekommen.

Erich Kretschmann, Zur Theorie der elektrischen Leitung und der Wärmestrahlung [1]).

1. Allgemeiner Ausdruck der elektrischen Leitfähigkeit eines homogenen isotropen Leiters erster Klasse, unabhängig von Voraussetzungen über die Dynamik der Leitungselektronen.

Es seien Anzahl und Geschwindigkeitsverteilung der Leitungselektronen in der Raumeinheit gegeben durch:

$$N = \int f d\sigma = 4\pi \int_0^\infty f \cdot v^2 \cdot dv. \qquad (1)$$

Betrachte den Schwarm von $f d\sigma$ Elektronen, deren Geschwindigkeit v im bestimmten Anfangsaugenblicke im Bereich $d\sigma$ liegt. Dann ist wegen der makroskopischen Isotropie die mittlere Schwarmgeschwindigkeit $\bar{v}$ nach der Zeit τ:

$$\bar{v} = \lambda(v, \tau) \cdot v_x \qquad (2)$$

wo λ ein — mit wachsendem τ von 1 zu Null abfallender — Skalar ist.

Der mittlere vom Schwarm zurückgelegte Weg ist:

$$\int_0^\infty \bar{v} d\tau = v \int_0^\infty \lambda d\tau = v \cdot \Lambda(v). \qquad (3)$$

$\Lambda(v)$ = Weg durch Geschwindigkeit heiße „Beharrungszeit".

Es wirke ein äußeres elektrostatisches Feld $\mathfrak{E}_x$. Es erzeugt während der Zeit $t - (\tau + d\tau)$ bis $t - \tau$ bei allen Elektronen (e, m) den Geschwindigkeitszuwachs:

$$d v_x = \frac{e \cdot \mathfrak{E}_x}{m} d\tau .$$

Nach Ablauf der Zeit τ mögen der Elektronenschwarm mit der Anfangsgeschwindigkeit v die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}'$ haben. Aus $d v_x$ ist dann

$$d \bar{v}_x' = \frac{\partial \bar{v}_x'}{\partial v_x} \cdot \frac{e \cdot \mathfrak{E}_x}{m} d\tau$$

geworden. Gemittelt über alle Elektronen und integriert über alle $d\tau$ ergibt sich die von $\mathfrak{E}_x$ erzeugte Geschwindigkeit

$$V_x = \frac{e \cdot \mathfrak{E}_x}{N' \cdot m} \int_0^\infty d\tau \int f' \cdot \frac{\partial \bar{v}_x'}{\partial v_x} d\sigma =$$

$$= \frac{e \cdot \mathfrak{E}_x}{m \cdot N'} \int d\sigma f' \frac{\partial}{\partial v_x} \int_0^\infty \bar{v}_x' d\tau$$

und die Stromdichte $i_x = V_x \cdot e \cdot N'$. Die Striche bei $\bar{v}_x'$, N' und f' sollen die durch $\mathfrak{E}_x$ bewirkten Änderungen dieser Größen bezeichnen.

Für $\mathfrak{E}_x = 0$ dürfen die Werte aus (1) und (2) eingesetzt werden, und man erhält mittels (3) die Leitfähigkeit:

$$\varkappa = \left(\frac{\partial i_x}{\partial \mathfrak{E}_x}\right)_{\mathfrak{E}_x = 0} =$$

$$= 4\pi \frac{e^2}{m} \int_0^\infty dv v^2 \cdot f \cdot \left(\Lambda + \frac{v}{3} \frac{\partial \Lambda}{\partial v}\right) =$$

$$= \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{m} \int_0^\infty dv f \frac{\partial}{\partial v} (v^3 \cdot \Lambda), \qquad (4)$$

die, wie das Ohmsche Gesetz zeigt, auch für $\mathfrak{E}_x \neq 0$ gilt.

Die Anwendung auf die bekannte Vorstellung einer zickzackförmigen Bewegung aller Elektronen mit der gleichen Geschwindigkeit v zwischen vollkommen elastischen kugelförmigen Atomen ergibt:

$$\Lambda = l/2v \quad (l = \text{mittlere freie Weglänge})$$

$$\varkappa = \frac{e^2}{m} N \left(1 + \frac{v}{3} \frac{\partial \Lambda}{\partial v}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2 \cdot l \cdot N}{2m \cdot v}$$

statt des bekannten Drudeschen Wertes $\varkappa = e^2 \cdot l \cdot N / 2mv$. Dieser erweist sich auch unmittelbar als falsch, wenn man berücksichtigt, daß die von $\mathfrak{E}_x$ beschleunigten Elektronen zwischen zwei Stößen im Mittel kürzere Zeit unterwegs und darum in jedem Augenblicke in geringerer Anzahl vorhanden sind als die verzögerten [1]).

---

1) Gekürzt, da ausführlich in den Ann. d. Phys.

1) Das hat E. Riecke bereits 1898, Wied. Ann. 66, S. 1200, d. h. zwei Jahre vor der Drudeschen Arbeit, Ann. d. Phys. 1, 566, 1900, als Bemerkung eines Hrn. van Everdingen mitgeteilt. Der dort nicht mitgeteilte Beweis geht einfach so. Ist $V_x' \ll v$ die mittlere Zusatzgeschwindigkeit der einzelnen Elektronen zwischen zwei Stößen und ϑ der Winkel zwischen v und der x-Richtung, so haben die Elektronen des Richtungsbereichs ϑ bis $\vartheta + d\vartheta$ die absolute Geschwindigkeit

$$v\left(1 + \frac{V_x'}{v} \cos\vartheta\right)$$

und die relative Häufigkeit:

$$\frac{dN}{N} = \frac{2\pi \sin\vartheta d\vartheta}{4\pi\left(1 + \frac{V_x'}{v}\cos\vartheta\right)}.$$

Die x-Komponente der Geschwindigkeit ist für ein Elektron $(v\cos\vartheta + V_x')$ und im Mittel:

$$V_x = \int_0^\pi d\vartheta \frac{\sin\vartheta (v\cos\vartheta + V_x')}{2\left(1 + \frac{V_x'}{v}\cos\vartheta\right)} =$$

$$= \frac{V_x'}{2} \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta (1 - \cos^2\vartheta) = \frac{2}{3} V_x'$$

statt V_x' wie Drude einfach annimmt.

Gültigkeitsbedingung des Rayleighschen Strahlungsgesetzes.

Bei seiner Ableitung des Rayleighschen Strahlungsgesetzes durch elektronentheoretische Bestimmung des Absorptions- und des Emissionsvermögens einer unendlich dünnen Metallschicht (Dicke dx) hat H. A. Lorentz[1]) seiner Berechnung des Absorptionsvermögens

$$a = \frac{4\pi}{c} \varkappa \cdot dx$$

den falschen Drudeschen Wert der Leitfähigkeit zugrunde gelegt und ist trotzdem zu dem richtigen Rayleighschen Strahlungsgesetz gelangt, ebenso wie nach ihm andere Forscher[2]) die einen — wenigstens in sich — richtigen Wert für $\varkappa$ benutzten[3]).

Der Widerspruch löst sich, wenn man auch das Emissionsvermögen einer Metallschicht durch den oben eingeführten allgemeinen Begriff der Beharrungszeit ausdrückt[4]), der dabei ganz ungezwungen eingeht.

Das Rayleighsche Strahlungsgesetz ergibt sich nämlich nur dann, wenn man für die Leitungselektronen die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung

$$f = f_0 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2\varkappa t}}$$

annimmt. Setzt man mit H. A. Lorentz für alle Leitungselektronen die gleiche Geschwindigkeit an, so wird das Emissionsvermögen im Verhältnis 2 : 3 zu klein. Durch den im gleichen Verhältnis zu kleinen Drudeschen Wert von K und a wird dieser Fehler bei H. A. Lorentz zufällig gerade ausgeglichen.

Diskussion.

Lenard: Ich bedaure, daß der Vortragende keinen Anschluß gab an die schon vorliegenden, sehr weitgehenden Untersuchungen über die Wanderungsgeschwindigkeiten kraftgetriebener Partikel (Ann. d. Phys.); man verliert so die Übersicht über Gültigkeitsbereich und Feinheitsgrad der Berechnungen verschiedener Autoren.

1) H. A. Lorentz, Akad. Amsterdam 1903, XI, S. 787.

2) J. J. Thomson, Phil. Mag. **14**, 217, 1907; J. H. Jeans, Phil. Mag. **17**, 773, 1909; Mc Laren, Phil. Mag. 21, 66, 1911; **25**, 43, 1913; Niels Bohr: „Studier over Metalliernes Elektronteori", Diss. Kopenhagen 1911.

3) Sie setzen durchweg die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung voraus, für die Gleichung (4) mit $A = l/2\nu$ zu dem bekannten Lorentzschen Ausdruck für $\varkappa$ führt.

4) Dabei wird noch $\lambda > 0$ und gleichmäßige Konvergenz des Integrals (3) für alle v vorausgesetzt.

P. Lertes (Frankfurt a. M.), Der Dipolrotationseffekt bei dielektrischen Flüssigkeiten [1]).

Durch Verallgemeinerung der Debyeschen Dipoltheorie und unter Heranziehung der Gesetze, welche für die Bewegungen von reibenden Flüssigkeiten gelten, hat M. Born[2]) eine neue Theorie der Beweglichkeit der elektrolytischen Ionen aufgestellt. Diese Theorie gibt zum mindesten eine gute qualitative Erklärung für die bekannte Tatsache, daß die Atomionen der Alkalimetalle und der Halogene von der sonst allgemein gültigen Regel abweichen, nach der die Ionenbeweglichkeit mit abnehmendem Atomvolumen wächst. Der Bornschen Theorie liegt die Vorstellung zugrunde, daß beim Durchgang eines Ions durch eine Dipolflüssigkeit die Dipole dem Ion ihre entgegengesetzte Ladung zukehren. Da jedoch die Dipole der Feldrichtung des geladenen Ions infolge der inneren Reibung nicht momentan folgen können, sondern etwas dagegen zurückbleiben, wird die Bewegung des Ions verzögert und gebremst, wodurch die eingangs erwähnte Anomalie bei den Alkalimetallen und den Halogenen bedingt sein soll. Um auch experimentell festzustellen, daß tatsächlich ein solcher Richteffekt der Dipole vorliegt, kann man nach einem Vorschlage von M. Born eine Dipolflüssigkeit in ein elektrostatisches Drehfeld hineinbringen. Auch hier werden die Dipole dem rotierenden Felde zu folgen versuchen, aber infolge der inneren Reibung gegen die Feldrichtung etwas zurückbleiben, wodurch eine Rotation der Flüssigkeit entstehen muß. Es wurden nun eine Reihe von Flüssigkeiten auf diesen von M. Born vorausgesagten Rotationseffekt hin untersucht. Für die Größe des Drehmomentes einer Dipolflüssigkeitskugel, welches abhängig ist von der Feldstärke E, dem Volumen und damit dem Radius R der Kugel, der Drehfeldfrequenz ω, der Reibungskonstanten η, dem Dipolmoment M, und dem Produkt aus Boltzmannscher Konstante k und der absoluten Temperatur T gilt der Ausdruck

$$L = E^2 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \omega \cdot \eta \cdot \left(\frac{M}{kT}\right)^2.$$

Bei der Untersuchung zeigte es sich, daß dieser Rotationseffekt namentlich bei den niederen Frequenzen von einem ähnlichen Rotationseffekt überlagert wird, der auf die Leitfähigkeit der Flüssigkeit zurückzuführen ist. Dieser Effekt war in einer früheren Arbeit[3]) eingehend untersucht worden. Entsprechend der Lampaschen

1) Die Originalarbeit ist erschienen in der Zeitschr. f. Phys. **8**, 56, 1921.

2) M. Born, Zeitschr. f. Phys. **1**, 22, 1920.

3) P. Lertes, Zeitschr. f. Phys. **4**, 315, 1920.

Theorie nimmt er zuerst mit steigender Frequenz zu, um nach Erreichen eines Maximums wieder abzunehmen, während der Bornsche Effekt mit wachsender Frequenz immer zunehmen muß. Um den Bornschen Effekt zu untersuchen, war es deshalb nötig, zu sehr hohen Drehfeldfrequenzen überzugehen, da nur in diesem Falle der Bornsche Effekt den Leitfähigkeitseffekt überwiegt.

Zur Erzeugung des elektrostatischen Drehfeldes wurden zwei um 90° in der Phase gegeneinander verschobene Wechselspannungen zu zwei zueinander rechtwinklig stehenden Plattenpaaren geführt. In die Mitte dieses Drehfeldes wurde an einem 105 cm langen und 0,06 mm dicken Phosphorbronzedraht eine dünnwandige Glaskugel von 103 ccm Inhalt zur Aufnahme der Flüssigkeiten hineingehängt. Zur Messung der Drehwinkel war mit der Kugel ein kleiner Spiegel starr verbunden, um die Messung mit Fernrohr und Skala zu ermöglichen. Zur Erzeugung der nötigen hochfrequenten Wechselspannungen wurden Elektronenröhren benutzt. Da bei zwei magnetisch gekoppelten Schwingungskreisen, die in Resonanz miteinander sind, die Spannungen um 90° in der Phase gegeneinander verschoben sind, so war dadurch die benötigte Phasenverschiebung leicht zu erreichen.

Zur Spannungsmessung und Prüfung des Drehfeldes auf seine Kreisförmigkeit diente eine Braunsche Röhre, die ebenfalls zwei rechtwinklig zueinander stehende Plattenpaare enthielt. Beim Anlegen des Drehfeldes an diese Platten beschrieb der durchtretende Kathodenstrahl auf dem Auffangschirm einen Kreis, aus dessen Durchmesser die Spannung ermittelt werden konnte. Lag keine Phasenverschiebung um 90° vor, oder waren die Spannungen an den Platten nicht gleich, so beschrieb der Kathodenstrahl eine Ellipse oder eine andere Figur.

Untersucht wurden die Flüssigkeiten Methylalkohol, Äthylalkohol, Amylalkahol, destilliertes Wasser, Leitungswasser, Äthyläther, Aceton, Toluol, Nitrobenzol, Glyzerin, Benzol und Petroleum, und zwar bei den Drehfeldfrequenzen $4{,}62 \cdot 10^7$, $1{,}75 \cdot 10^8$ und $4{,}48 \cdot 10^8$. Während bei den erstgenannten Flüssigkeiten bis einschließlich Glyzerin ein mit steigender Frequenz größer werdendes Drehmoment beobachtet wurde, zeigten Benzol und Petroleum keinen Rotationseffekt. Dadurch ergibt sich ein grundlegender Unterschied zwischen Dipolflüssigkeiten und solchen, die keine Dipole haben. Ferner zeigte es sich, daß die Drehmomente um so größer waren, je größer die Reibungskonstante der betreffenden Dipolflüssigkeit ist. Der zu erwartende Rotationseffekt auf Grund der Leitfähigkeit liegt bei den hier benutzten Drehfeldfrequenzen zum größten Teil in einer ganz anderen Größenordnung, so daß er bei der Empfindlichkeit der Apparatur nicht gemessen werden konnte. Mithin ist der von Born vorausgesagte Rotationseffekt tatsächlich vorhanden, was der ganzen Theorie und ihrer Anwendung auf die Ionenbeweglichkeit eine sichere Grundlage gibt. Da die Rotationseffekte auch quantitativ gemessen wurden, so ließen sich hieraus unter der Annahme, daß für die molekulare Reibungskonstante die gewöhnliche Reibungskonstante maßgebend ist, die Dipolmomente von einigen Flüssigkeiten bestimmen. Es ergaben sich beispielsweise als Dipolmomente für

Äthylalkohol . . .	$5{,}3 \cdot 10^{-19}$,
Dest. Wasser . . .	$7{,}4 \cdot 10^{-19}$,
Äthyläther	$12{,}7 \cdot 10^{-19}$,
Toluol	$6{,}3 \cdot 10^{-19}$,
Amylalkohol . . .	$8{,}9 \cdot 10^{-19}$,
Nitrobenzol . . .	$7{,}1 \cdot 10^{-19}$,
Glyzerin	$2{,}8 \cdot 10^{-19}$.

Die Fehlergrenze beträgt etwa 20 Proz. Bezüglich weiterer Einzelheiten wird auf die ausführliche Arbeit in der Zeitschr. f. Phys. **6**, 56, 1921 verwiesen.

Diskussion.

Debye: Der Herr Vortragende hat gesagt, daß das Drehmoment mit steigender Frequenz wachse Das kommt mir merkwürdig vor und es scheint mir, als ob bei hohen Frequenzen, bei denen die Dielektrizitätskonstante von ihrem statischen auf den optischen Wert fällt, ein Abfall des Drehmomentes eintreten müßte.

Lertes: Die ganze Untersuchung bezieht sich nur auf Frequenzen und Flüssigkeiten, bei denen eine Absorption und anormale Dispersion noch nicht vorliegt. Nur bei Glyzerin zeigte es sich, daß bei 10,2 m Wellenlänge kein Dreheffekt beobachtet wurde, während bei 40,8 m und 4,2 m ein Dreheffekt vorlag. Bei Glyzerin liegt bei etwa 10 m Wellenlänge das Absorptionsgebiet. Es ist nun wahrscheinlich, daß in diesem Falle das Feld nicht in das Innere der Flüssigkeit eindringt und nur die Oberflächenschicht in Rotation kommt, die so gering ist, daß mit der Empfindlichkeit der Anordnung ein solcher Effekt nicht gemessen werden konnte.

Born: Ich halte die Erklärung des Herrn Vortragenden für das Ausbleiben des Drehmoments bei Glyzerin in der Gegend von 10 m Wellenlänge für wichtig; das Feld kann wegen der starken Absorption nicht in die Flüssigkeit eindringen. Die Methode des Herrn Lertes ist darum wichtig, weil sie in Verbindung mit einer Messung der Temperaturabhängigkeit der

Dielektrizitätskonstanten ermöglichen wird, gleichzeitig mit dem Dipolmoment die molekulare Reibungskonstante zu bestimmen, die für eine kinetische Theorie der Flüssigkeiten von Bedeutung sein wird.

Lenard bemerkt, daß mit Berücksichtigung der Dipole die Durchmesser der elektrolytischen Ionen kleiner sich ergeben würden als von ihm berechnet (Ann. d. Phys. 1920). Das H-Ion wäre dann z. B. um so mehr kleiner, als das H_2O-Molekül, an welches es angelagert ist. Die von ihm berechnete merkwürdige Schrumpfung der H_2O-Moleküle bei Zusammenlegung mit dem positiv geladenen H-Atom ist also um so mehr als vorhanden zu betrachten.

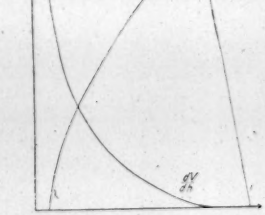
Albert Wigand (Halle a. S.), Der vertikale Leitungsstrom in der Atmosphäre und die Erhaltung des elektrostatischen Erdfeldes.

1. Problemstellung. Bereits in einer früheren Epoche der luftelektrischen Forschung hat man erkannt, daß der Ursprung und die Aufrechterhaltung des elektrostatischen Erdfeldes das Grundproblem ist. In letzter Zeit wurde diese Frage von neuem erörtert[2]), ohne daß man sie jedoch gelöst hätte. Unbekannt bleibt nach wie vor die physikalische Natur jenes Vorgangs in der Atmosphäre, der es bewirkt, daß das elektrostatische Erdfeld, von meteorologisch bedingten Schwankungen abgesehen, dauernd bestehen bleibt und nicht etwa in kurzer Zeit verschwindet infolge des auf Ionenwanderung beruhenden Ausgleichs der positiven Luftladung mit der negativen Entladung durch den normalen vertikalen Leitungsstrom. Immerhin sind die Möglichkeiten für die Natur jenes felderhaltenden Vorganges mit Rücksicht auf die neuen Ergebnisse der Strahlungslehre und Elektronik auf einige wenige eingeschränkt, so daß sich einfache experimentelle Fragestellungen ergeben, die eine baldige Lösung des Grundproblems erhoffen lassen. Zunächst ist die genaue Kenntnis der Änderung des Spannungsgefälles und des vertikalen Leitungsstroms mit der Höhe erforderlich.

2. Messungsergebnisse für die Änderung des Spannungsgefälles und des vertikalen Leitungsstroms mit der Höhe. Neue Beiträge hierzu bis zur Höhe von 9 km haben die Messungen gebracht, die ich bei Freiballonfahrten vor und nach dem Kriege gemeinsam mit Herrn Everling und anderen Mitarbeitern ausführte und jetzt abschließend veröffentliche[1]). Wegen der Meßmethodik verweise ich auf diese Arbeiten. Die vertikale Leitungsstromdichte wurde als Produkt gleichzeitig für dieselbe Höhe gemessener Werte des Spannungsgefälles und der Leitfähigkeit berechnet.

Der Vertikalverlauf des Spannungsgefälles hat nach Herrn Everlings Beobachtungen unter normalen meteorologischen Verhältnissen den bereits von früher her bis etwa 6 km Höhe bekannten Typus verzögerter Abnahme mit zunehmender Höhe bis zu einem Minimalwerte von rund 4 Volt/m in 9 km Höhe, während am Boden 100—200 Volt/m als Normalwert gefunden wird. Daraus ergibt sich nach der Poissonschen Gleichung der Potentialtheorie das Vorhandensein einer positiven Raumladung in der Atmosphäre mit nach oben abnehmender Dichte, so daß jedoch nahe der oberen Grenze der Troposphäre noch endliche Werte auftreten.

Die Änderung der Leitfähigkeit mit der Höhe ist nun zwar nach unseren Messungen in roher Annäherung reziprok der Höhenänderung des Spannungsgefälles, jedoch nicht genau reziprok (vgl. die schematische Figur). Der vertikale Leitungsstrom zeigt vielmehr in seinem allgemeinen Vertikalverlauf deutlich eine Abnahme mit zunehmender Höhe, hat also nicht, wie vielfach angenommen worden ist, eine von der Höhe unabhängige Größe. Zwar treten erhebliche Schwankungen in der Kurve auf, die teils wie auch beim Spannungsgefälle durch die meteorologische Schichtung der Atmosphäre bedingt sind, teils darauf beruhen, daß nicht immer ganz streng gleichzeitige Werte des Spannungs-



Schema des Höhenverlaufs von Leitfähigkeit λ, Spannungsgefälle $\frac{dV}{dh}$ und vertikaler Leitungsstromdichte i.

1) W. F. S. Swann, Terr. Magn. **20**, 105, 1915; Journ. Franclin Inst., November 1919, S. 597; R. Seeliger, Ann. d. Phys. **62**, 464, 1920; E. v. Schweidler, Ann. d. Phys. **63**, 726, 1920; K. Kähler, Meteor. Zeitschr. **36**, 199, 1921.

1) A. Wigand, Ann. d. Phys. **66**, 81, 1921; E. Everling und A. Wigand, Ann. d. Phys. (im Druck).

gefälles und der Leitfähigkeit zur Verfügung standen. Die Tendenz zur Abnahme mit zunehmender Höhe glauben wir aber als reell und für den stationären Zustand des vertikalen Leitungsstroms als typisch ansehen zu dürfen. Die Potsdamer Bodenwerte während der zwei Hochfahrten betrugen im Mittel $5-6 \cdot 10^{-7}$ E.S.E., in 3—4 km Höhe fanden wir rund $4 \cdot 10^{-7}$ und in 6—9 km Höhe Werte von $2{,}2 \cdot 10^{-7}$ für die vertikale Leitungsstromdichte.

Die Annahme einer Vertikalkonstanz der Stromdichte wäre schon nicht vereinbar mit den tatsächlichen örtlichen und zeitlichen Schwankungen, weder mit den an Schichtgrenzen auftretenden Diskontinuitäten der Höhenkurve des Vertikalstroms, noch auch mit den täglichen periodischen Änderungen der Bodenwerte. Denn da man diese letzteren Schwankungen dem Einfluß der Sonnenstrahlung auf den Erdboden und die bodennahen Luftschichten zuzuschreiben hat[1]), darf man vermuten, daß in bodenferneren Schichten, wo dieser Einfluß verschwindet, die periodischen Schwankungen fehlen werden; in der Höhe wird also ein Vertikalstrom fließen, dessen Größe von dem gleichzeitigen am Boden verschieden ist.

3. Folgerungen für die Erklärung der Erhaltung des elektrostatischen Erdfeldes. Aus der gefundenen Höhenkurve des vertikalen Leitungsstroms ist zu folgern, daß sich nicht nur in großen Höhen, sondern ebenso in den unteren Schichten der Atmosphäre ein nicht auf Ionenleitung beruhender Vorgang abspielt, der die betreffenden Schichten dauernd zu Quellen eines von oben nach unten gerichteten Vertikalstroms macht. Und dieser Vorgang wird in engem Zusammenhang mit den Eigenschaften der Luftschichten eine diskontinuierliche Verteilung besitzen, da erfahrungsgemäß an den Schichtgrenzen sprungweise Änderungen der vertikalen Stromdichte auftreten.

Ein solcher zur Erzeugung der Stromquellen angenommener Vorgang gibt dann auch die Möglichkeit zur Erklärung der Tatsache, daß das normale elektrostatische Erdfeld längere Zeit in einem Gleichgewichtszustande beharren kann, obgleich die das Erdfeld bewirkenden freien Ladungen dauernd schnell ausgeglichen werden. Der Vorgang, der das Erdfeld aufrecht erhält, würde sich danach in derselben Luftmasse abspielen, in der die ihn kompensierende vertikale Ionenwanderung des Leitungsstromes stattfindet.

Ohne vorläufig näher auf die physikalische Natur und Theorie dieses Vorganges, auf den man aus der Höhenänderung des vertikalen Leitungsstroms zu schließen hat, einzugehen, will ich nur die dafür in Frage kommenden Möglichkeiten nennen. Der in den höheren wie in den tieferen Schichten der Atmosphäre auftretende Vorgang kann darin bestehen, daß der Luft positive Ladung zugeführt oder negative Ladung entzogen wird, oder aber daß eine vertikal gerichtete Ionisierung stattfindet, bei der die entstehenden negativen Ionen relativ zu den zugehörigen positiven Ionen nach unten verschoben werden.

Diese letztere Vorstellung würde im wesentlichen mit der Hypothese von Swann[1]) übereinstimmen, nach der man die von oben kommende, sehr durchdringende γ-Strahlung in der Atmosphäre als wirksames Agens für den Ursprung uud die Aufrechterhaltung des Erdfeldes anzusehen hat, indem diese Strahlung in der Luft eine nach unten gerichtete, aus negativen Elektronen bestehende Dornsche Sekundärstrahlung erzeugen soll.

Die weiteren experimentellen Untersuchungen zur Klärung des luftelektrischen Grundproblems haben sich nun zu beziehen einmal auf die Feinstruktur des Vertikalverlaufs von Spannungsgefälle und vertikalem Leitungsstrom bis zu möglichst großer Höhe, und sodann besonders auf die noch recht rätselhaften Eigenschaften der physikalisch überaus interessanten durchdringenden Höhenstrahlung.

Diskussion.

Seeliger: Von den beiden Erklärungsmöglichkeiten für die Erhaltung des Erdfeldes, die sich aus der vom Vortragenden gefundenen Inkonstanz des vertikalen Leitungsstromes ergeben, ist die Einstrahlung positiver Ladung von außen nicht ausreichend, die gerichtete Elektronenstrahlung nach dem Schweidlerschen Versuch zunächst abgeschnitten. Wünschenswert und sehr wichtig wäre eine Wiederholung dieses Versuches in größeren Höhen.

Wigand: Eine positive Einstrahlung allein wäre zwar zur Erklärung der Höhenänderung des Vertikalstroms ausreichend, nicht jedoch zur Erklärung der Erhaltung des Erdfeldes. Die vertikal gerichtete Ionisierung ist nach den γ-Strahlenuntersuchungen durchaus möglich, in der Atmosphäre aber noch nachzuweisen.

Becker: Sie erklären die Aufrechterhaltung des Potentialgefälles der Atmosphäre, wenn ich richtig verstand, durch eine einseitige Elektronenemission aus der Atmosphäre durch harte γ-Strahlen von oben und eine dadurch veranlaßte

1) K. Kähler, diese Zeitschr. 13, 1216, 1912.

1) W. F. G. Swann, l. c.

räumliche Trennung der entstehenden Elektrizitätsträger. Dieser Deutung kann ich nicht zustimmen. Denn selbst wenn man die gerichtete lichtelektrische Wirkung an den Gasmolekülen zuläßt, was bis jetzt nicht zwingend erscheint, so ist doch zu beachten, daß die Trägerbildung überwiegend Folge der Elektronendurchquerung der Gasmoleküle ist, und daß in diesem Fall eine ungleichförmige Trägerverteilung nicht einzusehen wäre.

Wigand: Die von mir angeführte Swannsche Hypothese, deren Verifizierung noch aussteht, fußt auf der Tatsache, daß die von harten γ-Strahlen ausgelösten, sehr schnellen Elektronen vorzugsweise in gleicher Richtung wie die erregende γ-Strahlung emittiert werden. Und sehr schnelle Elektronen ionisieren erfahrungsgemäß die Luft weniger als langsamere. Versuche darüber in der Atmosphäre sind noch nicht gemacht.

Reinhold Fürth, Das Auftreten systematischer Fehler bei numerischer Auswertung physikalisch-statistischer Aufgaben.

I.

Hat man es mit der Messung irgendeiner physikalischen Schwankungserscheinung zu tun (etwa der Brownschen Bewegung), so hat man im Grunde genommen immer die Aufgabe, aus einer Serie von Messungen der schwankenden Größe nach irgendeiner Rechenvorschrift gewisse Mittelwertsbildungen vorzunehmen.

Dieses Rechengesetz ist nach physikalischen Ansätzen aus wahrscheinlichkeitstheoretischen Betrachtungen gewonnen und hat demgemäß folgenden Sinn: Ich bekomme die zu messende Schwankungsgröße absolut genau, wenn ich nach dieser Vorschrift mit Benützung eines unendlich großen Beobachtungsmaterials rechne, und einen mit Fehlern behafteten Näherungswert, wenn, wie ja in der Praxis immer der Fall, diese Serie aus einer endlichen Anzahl von Beobachtungen besteht. Obzwar ich also in der Praxis kein genaues Resultat erhalten kann, kann ich mich doch mit dieser Näherung begnügen, weil ich beweisen kann, daß der mutmaßliche Fehler gegen den wirklichen Wert bei genügender Vermehrung der Beobachtungen unter jeden angebbaren Wert herabgedrückt werden kann. Was aber nicht allgemein bewiesen werden kann, ist die bisher immer als selbstverständlich angesehene Annahme, daß der nach der besagten Rechenvorschrift aus einem endlichen Material errechnete Wert unter allen zu mindest der „wahrscheinlichste" ist. Ich werde im folgenden zeigen, daß diese Annahme allgemein keineswegs zutrifft, sondern daß man Fälle angeben kann, wo der aus der Rechenvorschrift errechnete Wert gegen den „wahrscheinlichsten" systematische Abweichungen bei endlicher Beobachtungszahl aufweist, die einseitig gegen Null gehen, wenn man diese Zahl der Beobachtungen unbeschränkt zunehmen läßt.

Ein zweiter Punkt, der auch bei statistisch physikalischen Messungen nicht beachtet zu sein scheint, ist der folgende: Ich hätte aus einer endlichen Zahl n von Beobachtungen nach einer gewissen Rechenvorschrift eine Größe D zu berechnen. Ich würde diese Größe ganz genau bekommen, wenn n unbegrenzt zunimmt, da ich aber nur eine endliche Zahl n habe, werde ich nicht den wahren Wert D bekommen, sondern ein gewisses Δ, derart, daß jedem Wert Δ eine gewisse Wahrscheinlichkeit $\varphi(\Delta)$ zukommt. Ich habe oben bereits angedeutet, daß das Maximum von $\varphi(\Delta)$ keineswegs mit D zusammenfallen muß. Dazu kommt aber nun noch eine andere Frage. Nämlich, ist es gestattet, aus einer einzigen Serie von n Beobachtungen überhaupt irgendeinen Schluß über D zu ziehen und welchen? Gewöhnlich scheint man hier wiederum als selbstverständlich anzunehmen, daß man, wenn überhaupt, am ehesten behaupten kann, der aus einer einzigen Serie berechnete Δ-Wert sei der „wahrscheinlichste", d. h. jener, der dem Maximum der Wahrscheinlichkeit von Δ entspricht. Das halte ich nun für prinzipiell verfehlt.

Wir sind bei physikalischen Messungen in den weitaus meisten Fällen gewöhnt, mit Gaußschen Fehlerverteilungen oder doch zumindest mit symmetrischen zu operieren, bei denen die Wahrscheinlichkeit von Fehlern nach der positiven und negativen Seite gleich groß ist. Nun werden wir doch sagen, eine Messung sei frei von systematischen Fehlern, wenn es ebenso häufig vorkommt, daß die Messung größer ausfällt als die wahre Größe, als umgekehrt. Oder als „wahrer" Wert der zu messenden Größe wird gemäß Definition der Freiheit von systematischen Fehlern jener Wert angesehen, der definiert ist durch die Gleichung

$$\int_0^{\Delta_g} \varphi(\Delta)\, d\Delta = \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Im Falle symmetrischer Fehlerverteilung nun fällt dieser Wert selbstverständlich mit dem wahrscheinlichsten zusammen, nicht aber im Falle unsymmetrischer Verteilung, wie sie in der physikalischen Statistik häufig vorkommt.

Es scheint mir daher, daß man mit dem geringsten zu erwartenden Fehler das aus einer einzigen Serie bestimmte Δ mit diesem Δg zu identifizieren hat und nicht mit den davon verschiedenen Δ_w bzw. D.

Ist man sich über diese beiden Punkte klar geworden, so müssen sie auch berücksichtigt werden und es ergibt sich die Aufgabe, bei der auszuführenden Messung diese drei Größen sauber auseinander zu halten und ihr gegenseitiges Verhältnis in Abhängigkeit von n zu bestimmen. Ich habe speziell für den Fall der Brownschen Bewegung die betreffenden Überlegungen durchgeführt, die ich hier nur in den Hauptresultaten anführe. Die ausführliche Publikation soll an anderer Stelle demnächst erfolgen.

II.

Als erstes Beispiel behandeln wir die Brownsche Verschiebung eines schweren Partikelchens in Richtung der Schwerkraft. Bekanntlich gilt für die Wahrscheinlichkeit einer Verschiebung zwischen x und $x + dx$ des Teilchens in der Zeit t die Formel

$$w(x)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\, e^{-\frac{(x-ct)^2}{4Dt}}\, dx, \qquad (1)$$

wo D den Diffusionskoeffizienten und c die mittlere Fallgeschwindigkeit des Teilchens bedeuten. Aus dieser Formel folgt sofort die Rechenvorschrift zur Bestimmung des D und c

$$\overline{x} = \int_0^\infty w(x)\,dx = ct$$

$$\overline{(x-ct)^2} = \int_0^\infty (x-ct)^2 \cdot w(x)\,dx = 2Dt.$$

Diese Formeln gelten genau für den Fall unbegrenzt vieler Beobachtungen, die zu dem Mittel $\overline{(x-ct)^2}$ vereinigt werden sollen. Wir nehmen nun an, es seien bloß endlich viele Beobachtungen n in einer Serie vereinigt, dann lautet die Rechenvorschrift

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \qquad (2)$$

$$\overline{(x-\overline{x})^2} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right)^2.$$

Aus letzterer Formel kommt man jedoch nicht zum „wahren" Wert D, sondern zu einem davon im allgemeinen verschiedenen Δ nach der Formel

$$2\Delta = \overline{(x-\overline{x})^2}\,\frac{1}{t}. \qquad (2a)$$

Denken wir uns nun eine sehr große Zahl von Serien, alle mit derselben Beobachtungsanzahl n angestellt und aus jeder dieser Serien Δ nach obiger Rechenvorschrift ausgerechnet, welches ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\varphi(\Delta)$ der erhaltenen Δ-Werte?

Offenbar ist nach Formel (1) die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer bestimmten Kombination der x-Werte derart, daß die erste Beobachtung zwischen x_1 und $x_1 + dx_1$ liegt, die zweite zwischen x_2 und $x^2 + dx_2$ usw., die $n$te zwischen x_n und $x_n + dx_n$, gegeben durch

$$w(x_1 \ldots x_n)\,dx_1 \ldots dx_n = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\right)^n e^{-\frac{1}{4Dt}\sum (x-ct)^2}\, dx_1 \ldots dx_n. \qquad (3)$$

Die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Δ zwischen Δ und $\Delta + d\Delta$ setzt sich nun aus allen Wahrscheinlichkeiten (3) zusammen, deren $x_1 \ldots x_n$ nach Formel (2) bzw. (2a) das gleiche Δ ergeben. Wir müssen also (3) über $x_1 \ldots x_n$ derart integrieren, daß dabei der Ausdruck $\frac{1}{n}\sum x_\nu^2 - \left(\frac{1}{n}\sum x_\nu\right)^2$ konstant bleibt.

Führt man diese Rechnung aus, so gelangt man schließlich zu folgender Formel für $\varphi(\Delta)$:

$$w(\Delta)\,d\Delta = \left(\frac{n}{2D}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\, e^{-\frac{n}{2D}\Delta}\, \Delta^{\frac{n-3}{2}}\, d\Delta. \qquad (4)$$

Diese Formel erfüllt zunächst, wie man sich überzeugen kann, die selbstverständliche Forderung

$$\int_0^\infty w(\Delta)\,d\Delta = 1. \qquad (5)$$

Rechnet man sich aus (4) die Größe Δ aus, das heißt den Mittelwert von Δ aus einer sehr großen Zahl von Serien mit der gleichen Beobachtungszahl n, so erhält man nicht etwa, wie man zunächst hätte erwarten sollen D, sondern den davon systematisch verschiedenen Wert

$$\overline{\Delta} = \frac{n-1}{n} D, \qquad (6)$$

oder mit anderen Worten, man darf bei der Mittelwertsbildung in (2) nicht durch n dividieren, sondern durch $n-1$, ein Resultat, das bekanntlich auch in der Fehlerrechnung auftritt und von Herrn Schrödinger auf anderem Wege für diesen Fall bereits abgeleitet worden ist.

Der wahrscheinlichste Wert Δ_w ergibt sich aus (4) zu

$$\Delta_w = \frac{n-3}{n} \cdot D, \qquad (7)$$

also systematisch kleiner als D und auch als

Δ, was der eingangs erwähnten Behauptung entspricht.

Schließlich kann man nun auch noch Δ_g gemäß Formel (1) ausrechnen, da sich das Integral immer auf das Fehlerintegral zurückführen läßt. Für die kleinen Werte von n sind die entsprechenden Größen in folgender Tabelle I vereinigt.

Tabelle I.

n	$\overline{\Delta}$	Δ_w	Δ_g
2	0,500 D	0,000 D	0,228 D
3	0,667 „	0,000 „	0,462 „
4	0,750 „	0,250 „	0,601 „
5	0,800 „	0,400 „	0,670 „
9	0,889 „	0,667 „	0,816 „
12	0,916 „	0,750 „	0,859 „

Schließlich kann man auch noch das Präzisionsmaß, das heißt den mittleren relativen Fehler des 2Δ gegen $2D$ aus Formel (4) gemäß

$$4D^2\varepsilon^2 = 4\int_0^\infty \varphi(\Delta)(\Delta - D)^2 d\Delta$$

ausrechnen und kommt so zu

$$\sqrt{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}, \qquad (8)$$

welche Formel von Schrödinger zum erstenmal, allerdings für einen etwas anderen Fall, abgeleitet worden ist, der aber, wie wir gleich sehen werden, dem vorliegenden ganz analog ist. Geht man korrekterweise bei der Berechnung von ε so vor, daß man bei der Mittelbildung durch $n-1$ dividiert, so ändert sich auch das Präzisionsmaß gemäß

$$4D^2\varepsilon'^2 = 4\left(\frac{n}{n-1}\Delta - D\right)^2,$$

woraus folgt

$$\varepsilon' = \sqrt{\frac{2}{n-1}}, \qquad (8a)$$

was formal in der Tat genau den Vorschriften der Fehlerrechnung entspricht.

III.

Ganz analog kann man den für die Ehrenhaft-Millikansche Methode der Ladungsbestimmung wichtige Beobachtungsart der Brownschen Bewegung erledigen, wo die Erstpassagen des fallenden Teilchens durch die Horizontalstriche eines Rasters zeitlich registriert werden. Die Schrödinger-Smoluchowskische Formel für die Wahrscheinlichkeit einer solchen „einseitigen" Erstpassage zwischen t und $t+dt$ über die Strecke x lautet

$$w(t)\,dt = \frac{x}{2\sqrt{\pi D t^3}}\, e^{-\frac{(x-ct)^2}{4Dt}}\, dt, \qquad (9)$$

wenn wieder c die mittlere Fallgeschwindigkeit bedeutet.

Aus (9) folgt sofort

$$\bar{t} = \frac{x}{c}, \quad 2D = x^2\left|\left(\overline{\frac{1}{t}}\right) - \frac{1}{\bar{t}}\right|$$

für unbeschränkt viele Beobachtungen.

Hat man nun wieder eine Serie mit n Beobachtungen $t_1, \ldots t_n$, so ist die Wahrscheinlichkeit dieser Kombination der t-Werte

$$w(t_1 \ldots t_n)\,dt_1 \ldots dt_n = \left(\frac{x}{2\sqrt{\pi D t^3}}\right)^n e^{-\sum\frac{(x-ct)^2}{4Dt}}\, dt_1 \ldots dt_n, \qquad (10)$$

während sich aus den Beobachtungen ein Δ nach der Rechenformel

$$2\Delta = \frac{x^2}{n}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{t_\nu} - \frac{n^2}{\sum_{\nu=1}^{n} t_\nu}\right) \qquad (11)$$

berechnen läßt. Ermittelt man auf analoge Weise wie unter (2) die Wahrscheinlichkeit $\varphi(\Delta)$ eines bestimmten aus (11) berechneten Δ, so erhält man abermals Formel (4). Daher bleiben alle aus dieser Formel gezogenen Schlußfolgerungen auch in diesem Falle aufrecht.

Man hat also auch in diesem Falle eine systematische Verkleinerung von D gegen den wahren Wert zu erwarten, eine Aussage, die bekanntlich an dem Beobachtungsmaterial bei Teilchen in Flüssigkeiten und Gasen durchaus bestätigt worden ist. Die seinerzeit von mir vorgeschlagene Erklärung und Korrektionsformel, die damals ausdrücklich als ein Notbehelf bezeichnet wurde, stimmt, wie man zeigen kann, im wesentlichen mit der hier gegebenen vollständigen Theorie überein. Die ausführliche Erörterung an Hand des vorliegenden statistischen Zahlenmaterials soll in der ausführlichen Publikation erfolgen.

4.

Schließlich möchte ich noch zeigen, daß ein anderer Weg zur Messung der Brownschen Bewegung, den ich vor einiger Zeit angegeben und in einigen Untersuchungen verwendet habe, nicht nur durch seine einfache Meßmethodik allen anderen Methoden zur Messung der Brownschen Bewegung vorzuziehen ist, sondern auch deshalb, weil er im Gegensatz zu den hier besprochenen verschwindend kleine systematische Fehler und sehr kleine Fehlerstreuung aufweist. Die Methode, die ich als Messung „doppelseitiger Erstpassagezeiten" bezeichnet habe, beruht darauf, die Passagen des Teilchens in

horizontaler Richtung durch eine Schar vertikaler Rasterstriche nach beiden Seiten hin zu beobachten.

Die Formel für die Wahrscheinlichkeit einer Erstpassage zwischen t und $t+dt$ lautet in diesem Falle

$$w(t)\,dt = \frac{\pi D}{x^2} \sum_{k=1}^{\infty} k \sin\frac{k\pi}{2}\, e^{-D\left(\frac{k\pi}{2x}\right)^2 t}\,dt, \quad (12)$$

woraus zur Berechnung von D die einfache Formel gefolgert werden kann

$$2D = \frac{x^2}{t}. \quad (13)$$

Hat man hier wieder eine Serie von n Werten $t_1 \ldots t_n$, und geht zur Berechnung von D nach (13) vor, indem man

$$\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} t_\nu$$

setzt, so kann man nach demselben Vorgange wie früher wieder die Wahrscheinlichkeit $\varphi(\Delta)$ bestimmter Δ suchen.

Leider ist es mir in diesem Falle nicht gelungen, allgemein für beliebige n das Problem zu lösen, jedoch ist die sukzessive Lösung für $n = 1, 2, 3 \ldots$ mit keinen prinzipiellen Schwierigkeiten verbunden.

Ohne diese Formeln hier im Detail wiederzugeben, teile ich für $n = 1, 2, 3$ die daraus folgenden Werte von $\bar{\Delta}$, Δ_w, Δ_g und das Präzisionsmaß ε mit.

Auf den ersten Blick überrascht es, daß für alle n $\bar{\Delta} = \infty$ herauskommt. Schaut man sich jedoch Formel (13) genauer an, so sieht man, daß das Resultat durch die einseitige Begrenzung der t und die Stellung des $\bar{t}$ im Nenner hervorgebracht ist. Dagegen ergibt sich für alle n

$$\left(\frac{1}{\Delta}\right) = \frac{1}{D},$$

d. h. man erhält den Wert von D genau ohne systematische Fehler, wenn man eine große Anzahl von Serien so verbindet, daß man einfach alle t zu einem Generalmittel $\bar{t}$ vereinigt und nach (13) rechnet. Das ist selbstverständlich, da ja die aus verschiedenen Serien gewonnenen t durchaus gleichwertig sind; erfreulich ist aber, daß man hier auch bei endlicher Beobachtungszahl im Gegensatz zu früher keinen systematischen Fehler bekommt.

Man sieht aus Tabelle II die äußerst rasche Abnahme von ε mit n, sowie daß Δ_g bereits für $n = 3$ nur mehr eine sehr geringe systematische Abweichung von D aufweist, so daß man bereits aus recht kurzen Serien ziemlich

Tabelle II.

n	Δ_w	Δ_g	$(1/\Delta)$	ε
1	0,62 D	1,31 D	$1/D$	0.817
2	0,79 „	1,13 „	$1/D$	0.595
3	0,85 „	1,08 „	$1/D$	0.472

sichere Schlüsse auf D ziehen kann. Die ausführliche Erläuterung auch dieser Fragen soll, wie bereits erwähnt, an anderer Stelle erfolgen.

Prag, September 1921.

Philipp Frank (Prag), Über Entstehung von Periodizitäten durch Zufall.

Der ursprüngliche Anlaß zur Einführung der Quantenhypothese war für Planck das Versagen der klassischen Statistik bei der Berechnung der Häufigkeit, mit der die verschiedenen Frequenzen in der schwarzen Strahlung auftreten. Die Erfahrung zeigte, daß die hohen Frequenzen viel seltener sind als sie nach der klassischen Theorie sein sollten. Jede Strahlungstheorie muß daher die von Ehrenfest sogenannte „Violettforderung“ erfüllen, die besagt, daß die Wahrscheinlichkeit einer Frequenz ν mit wachsendem ν gegen Null gehen muß, wie das etwa beim Wienschen Strahlungsgesetz der Fall ist, das für den Resonator die mittlere Energie $\nu e^{-\alpha\nu}$ ergibt.

Ich möchte nun im folgenden über ein Problem sprechen, bei dem dieses Seltenwerden der Frequenzen mit wachsendem ν nach der gewöhnlichen Wahrscheinlichkeitsrechnung zustandekommt und das eine gewisse Analogie zum Strahlungsproblem aufweist. Wir denken uns ein Teilchen, das lineare Schwingungen ausführt, die aber nicht durch irgendwelche innere Eigenschaften des schwingenden Systems bedingt sind, sondern nur durch äußere Einflüsse, die nach Zufallsgesetzen auf das Teilchen wirken. Um einen konkreten Fall vor Augen zu haben, können wir uns etwa einen linearen Resonator von verschwindender Trägheit und Direktionskraft denken, der durch Stöße von Gasmolekülen in Schwingung erhalten wird. Die Schwingung wird natürlich keine periodische sein, doch werden ungefähr jede Sekunde gleichviele (n)-Schwingungen stattfinden. Zufällig könnten diese n-Schwingungen in gleichen Abständen erfolgen, dann würden wir eine periodische Schwingung von der Frequenz n vor uns haben, ein Fall, dessen Eintreten offenbar sehr unwahrscheinlich ist, besonders wenn n, wie wir annehmen wollen, eine große Zahl ist.

Wahrscheinlicher ist es offenbar, daß unter

den n-unregelmäßigen Schwingungen ν sind (wo $\nu < n$), die in gleichen zeitlichen Abständen $\frac{1}{\nu}$ aufeinander folgen. Wir können so jeder Frequenz ν eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zuschreiben. Die genaue Berechnung dieser Größe müßte mit Hilfe der Theorie der Brownschen Bewegung durchgeführt werden. Doch genügt es, um den Verlauf dieser Funktion von ν ungefähr kennen zu lernen, ein Urnenschema zu konstruieren, bei dem ein analoges Problem der Wahrscheinlichkeitsrechnung auftritt.

Wir denken uns N in einer geraden Linie angeordnete Kästchen und werfen n-Kugeln aufs Geratewohl hinein. Wir fragen dann nach der Wahrscheinlichkeit, daß eine periodische Verteilung der Kugeln von der Frequenz ν entsteht. Darunter verstehen wir eine solche Verteilung, bei der sich unter den n-Kugeln ν befinden, die in gleichen Abständen (in der Länge von $\frac{N}{\nu}$ Kästchen) voneinander liegen. Man sieht sofort, daß $\nu = n$ die größte überhaupt mögliche Frequenz ist und daß ihr die kleinste Wahrscheinlichkeit zukommt. Man kann die allgemeine Formel für die Wahrscheinlichkeit der Frequenz ν nach den gewöhnlichen Regeln der Kombinatorik berechnen, indem man abzählt, wie viele von den N^n möglichen individuellen Verteilungen der Kugeln die fragliche Periodizität aufweisen. Doch werden die Formeln sehr kompliziert und wir wollen uns hier darauf beschränken, den Fall zu behandeln, wo n klein gegen N ist. Dann ist die Anzahl der Fälle, wo mehr als eine Kugel in einem Fach ist, verschwindend klein gegen die Gesamtzahl und der Ausdruck für die gesuchte Wahrscheinlichkeit läßt sich sehr einfach gewinnen.

Wenn eine bestimmte Verteilung der Kugeln die der Frequenz ν entsprechende Periodizität aufweisen soll, so muß sie sicher eine der folgenden Eigenschaften haben.

Entweder müssen die Kästchen (wenn ich sie fortlaufend numeriere)

$$1, 1+\frac{N}{\nu},\ 1+\frac{2N}{\nu} \cdots 1+\frac{(\nu-1)N}{\nu}$$

eine Kugel enthalten oder die Kästchen

$$2, 2+\frac{N}{\nu},\ 2+\frac{2N}{\nu} \cdots 2+\frac{(\nu-1)N}{\nu}$$

oder eine mit dem Kästchen $3, 4 \cdots \frac{N}{\nu}$ beginnende entsprechende Reihe. Natürlich schließen diese Merkmale einander nicht aus, sondern eine Verteilung von Kugeln kann mehrere unter den genannten Merkmalen besitzen. Wegen unserer Voraussetzung ($n \ll N$) wird aber die Anzahl der Verteilungen, die mehreren der genannten $\frac{N}{\nu}$-Gruppen angehören, verschwindend klein sein, so daß wir praktisch so rechnen können, als würden die Verteilungen, die einer Frequenz ν entsprechen, in die aufgezählten $\frac{N}{\nu}$ getrennten Gruppen zerfallen. Jede dieser Gruppen enthält natürlich gleich viele Verteilungen, so daß wir nur die Wahrscheinlichkeit berechnen müssen, daß eine Verteilung einer bestimmten dieser Gruppen angehört.

Die Wahrscheinlichkeit, daß beim Werfen einer Kugel die Kugel in ein bestimmtes Kästchen fällt, ist $\frac{1}{N}$, die Wahrscheinlichkeit, daß beim Werfen mit n-Kugeln mindestens eine in ein bestimmtes Kästchen fällt, ist wegen unserer Voraussetzung ($n \ll N$) dann einfach $\frac{n}{N}$. Die Wahrscheinlichkeit, daß das Ergebnis des Wurfes mit n-Kugeln in einer bestimmten (den der ersten) Gruppe der zur Frequenz N gehörenden Verteilungen enthalten ist, ist nichts anderes als die Wahrscheinlichkeit, daß bei diesen Würfen ν bestimmte Kästchen eine Kugel erhalten. Diese ist unter unserer Voraussetzung einfach $\left(\frac{n}{N}\right)^\nu$. Die Wahrscheinlichkeit der Frequenz ν überhaupt ist also $\frac{N}{\nu}\left(\frac{n}{N}\right)^\nu$. Setzen wir $\lg \frac{N}{n} = \alpha$, so erhalten wir dafür $\frac{n}{\nu} e^\nu e^{-\alpha\nu}$. Wir sehen hier tatsächlich das gesetzmäßige Abnehmen der Häufigkeit von Periodizitäten mit wachsendem ν.

Wenn wir uns aber diese Periodizitäten als durch zufällige Stöße erregte Schwingungen vorstellen und wir wie bei harmonischen Schwingungen annehmen, daß die Energie der Schwingung ν^2 proportional ist, erhalten wir das Ergebnis, daß die mittlere Energie der Schwingungen der Frequenz ν dem Ausdruck $\nu e^{-\alpha\nu}$ proportional ist, wie beim Wienschen Strahlungsgesetz. Doch ist auf diese Übereinstimmung wegen des willkürlichen Energiegesetzes nicht allzu großer Wert zu legen und es kam mir im wesentlichen nur darauf an, zu zeigen, wie sich das gesetzmäßige Abnehmen der Häufigkeit hoher Frequenzen in manchen Fällen verstehen läßt.

A. Byk (Berlin), Das Theorem der übereinstimmenden Zustände und die Quantentheorie der Gase und Flüssigkeiten.

Die Sonderstellung der Substanzen mit tiefer kritischer Temperatur gegenüber dem Theorem der übereinstimmenden Zustände bzw. dem Prinzip der mechanischen Ähnlichkeit, der molekularmechanischen Grundlage des Theorems, führt zu der Frage, ob das Ähnlichkeitsprinzip mit der Quantentheorie überhaupt verträglich sei. Das ist nicht der Fall, und von der Planckschen Strukturtheorie des Phasenraumes aus kommt man zu einer die Körper mit tiefer kritischer Temperatur berücksichtigenden Verallgemeinerung des klassischen Theorems, einem Quantentheorem der übereinstimmenden Zustände. Dieses bezieht sich nicht wie das klassische nur auf den Volumkoeffizienten der freien Energie, die Zustandsgleichung, sondern auf die freie Energie selbst und umfaßt daher im Gegensatz zum klassischen Theorem auch die Entropie. Das klassische Theorem erscheint dabei als Grenzfall für Substanzen mit hoher kritischer Temperatur.

Nach dem Quantentheorem der übereinstimmenden Zustände erhält die reduzierte freie Energie die Form einer universellen Funktion f des reduzierten Volumens, der reduzierten Temperatur und des reduzierten Wirkungsquantums:

$$\frac{F/N}{k\mathfrak{d}_0} = (\varphi, \mathfrak{d}, \tau).$$

Dabei ist F die freie Energie pro Mol, N die Anzahl wahrer Moleküle im Mol, k die molekulare Gaskonstante, $\varphi = \frac{v/N}{\varphi_0/N}$ das reduzierte Volumen, v das Molvolumen, φ_0 das kritische Molvolumen, $\mathfrak{d} = \frac{T}{\mathfrak{d}_0}$ die reduzierte, T die absolute, $\mathfrak{d}_0$ die kritische Temperatur.

Als individueller Parameter tritt hier das auf das spezifische Maßsystem der einzelnen Substanz reduzierte Plancksche Wirkungsquantum

$$\tau = \frac{h}{m_0^{1/2}\left(\frac{\varphi_0}{N}\right)^{1/3}\cdot(k\mathfrak{d}_0)^{1/2}},$$

(h absolutes Plancksches Wirkungsquantum, m_0 Molekülmasse) auf.

Die Theorie wird zunächst auf die Gleichungen des Sättigungszustandes angewandt. Die Dampfdruckgleichungen von van der Waals und von Nernst, die Regel der geraden Mittellinie der Dampf- und Flüssigkeitsdichten von Cailletet und Mathias sowie der kritische Koeffizient lassen sich in Form universeller Funktionen der reduzierten Temperatur, des reduzierten Volumens und des reduzierten Wirkungsquantums darstellen, in die τ in der Form

$$\alpha + \beta \frac{\delta\tau}{e^{\delta\tau} - 1}$$

eingeht (α, β, δ universelle Konstante). Die erhaltenen Beziehungen werden im einzelnen zur quantentheoretischen Berechnung von Siedepunkten bei Atmosphärendruck sowie der zugehörigen Flüssigkeits- und Dampfvolumina benutzt. Es wird auf eine Reihe weiterer Anwendungen der entwickelten Methode der Quantenthermodynamik hingewiesen.

Léon Schames (Frankfurt a. M.), Allgemeine Verbesserung der Zustandsgleichung; spezielle Zustandsgleichung für Wasserstoff.

Die wesentlichen bisherigen Verbesserungen der van der Waalsschen Zustandsgleichung

$$(v - b)\left(p + \frac{a}{v^2}\right) = RT \qquad (1)$$

bestehen darin, daß 1. die Volumkorrektion b, 2. die Attraktionsgröße a als Funktion des Zustands aufgefaßt werden. Die theoretischen Versuche, dies zu tun, beruhen zum größten Teil auf der schon von van der Waals benutzten Voraussetzung, daß die Moleküle vollkommen starre Kugeln sind, d. h. also, daß b nur Volumfunktion ist, und zwar als Reihe entwickelt

$$b = b_A\left[1 + b_1\frac{b_A}{v} + b_2\left(\frac{b_A}{v}\right)^2 + \ldots\right], \qquad (2)$$

wobei der Index A den Avogadroschen Zustand kennzeichnet. Die Voraussetzung der Starrheit ist nun sicher in Wirklichkeit nicht streng erfüllt, wie schon das Bild vom elektrischen Aufbau der Materie, als auch die Erfahrung bei den höchsten reduzierten Temperaturen (He) zeigen. Trotzdem darf diese Voraussetzung für das im allgemeinen der Erfahrung zugängliche Zustandsgebiet als genügend realisiert betrachtet werden; wir basieren deshalb im folgenden auf ihr, müssen dann aber die Zustände extrem hoher Temperaturen gesondert diskutieren.

§ 1. Die bisherige Theorie der Stoßfunktion $\varphi(v)$

$$\left.\begin{aligned}\varphi(v) = \frac{v}{v-b} = 1 + \varphi_1\frac{b_A}{v} + \varphi_2\left(\frac{b_A}{v}\right)^2 + \\ + \varphi_3\left(\frac{b_A}{v}\right)^3 + \ldots.\end{aligned}\right\} \qquad (2a)$$

ermöglichte es, die angeschriebenen Koeffizienten von (2a) bzw. (2) zu berechnen, und zwar ergab sich

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi_1 = 1 & \\ \varphi_2 = \frac{5}{8} & b_1 = -\frac{3}{8} \\ \varphi_3 = 0{,}2868 & b_2 = 0{,}0369 \end{array}\right\} \quad (2b)$$

Weitere Koeffizienten so zu berechnen, stieß auf unüberwindliche Schwierigkeiten. Wir wollen auf einem anderen Weg zwei weitere Koeffizienten berechnen, wobei wir dann die unendlichen Reihen als nach diesen Gliedern abgebrochen ansehen. Zu diesem Zwecke bedenken wir, daß für die dichtmöglichste Lagerung starrer Kugeln ein Grenzvolumen bei

$$\left.\begin{array}{l} \frac{v}{b_A} = \frac{b}{b_A} = 0{,}338 \\ \text{folgt und daß hierbei sein muß} \\ \frac{db}{dv} = 1. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Die vervollkommnete Reihe muß diesen beiden Bedingungen genügen, so daß wir hieraus zwei weitere Koeffizienten berechnen können; wir erhalten so

$$\left.\begin{array}{ll} b_3 = 0{,}0144 & \varphi_4 = 0{,}0750, \\ b_4 = -0{,}0032 & \varphi_5 = 0{,}0020. \end{array}\right\} \quad (2c)$$

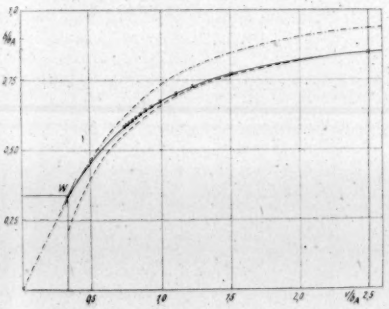


Fig. 1.

In Fig. 1 haben wir gestrichelt die Abhängigkeit $\frac{b}{b_A}$ von $\frac{v}{b_A}$ mit den alten Koeffizienten (2b) gezeichnet und ausgezogen die Kurve, die sich unter Hinzunahme der neuen (2c) ergibt. Für H_2, bei dem die größte bisher erreichte Dichte (Amagat) der Wert $\frac{v}{b_A} \sim 1{,}36$ entspricht, bedingen die neuen Glieder eine nur unwesentliche Differenz; für N_2 hingegen zeigen die aus den Amagatschen Messungen berechneten Werte (Kreuze) deutlich die durch die neuen Glieder erzielte Verbesserung. Becker[1]) hat die gleichen Werte unlängst durch eine empirische Funktion dargestellt. Er setzte für die Stoßfunktion

$$\varphi(v) = 1 + \frac{k}{v} e^{\frac{k}{v}}, \quad (4)$$

ohne auf die physikalische Bedeutung von k einzugehen. Der Vergleich von (4) mit (2a) zeigt sofort, daß k mit b_A identisch wird, und daß nach Becker die Stoßkoeffizienten wären: $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = 1$, $\varphi_3 = \frac{1}{2}$, $\varphi_4 = \frac{1}{6}$ usw. Die Beckersche Funktion (in Fig. 1 strichpunktiert) genügt also nicht, sie würde außerdem zum Grenzvolumen Null führen.

§ 2. Wir kommen jetzt zur Behandlung der Attraktionsgröße a und wollen zuerst ihren Zusammenhang mit der inneren Energie U diskutieren. Definieren wir als thermodynamische Attraktion $\dot{a}$

$$\dot{a} = \frac{\partial U}{\partial v} v^2 = \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p \right] v^2, \quad (5)$$

so hatten wir vor kurzem thermodynamisch gezeigt[1]), daß dann

$$a = T \int_{\infty}^{v} \dot{a} \, d\left(\frac{1}{T}\right); \quad (6)$$

wir müssen nachträglich darauf hinweisen, daß das nur unter Voraussetzung der Starrheit gilt. Dann ist also sowohl für $T = 0$ als auch für $T = \infty$ a mit $\dot{a}$ identisch.

Die Temperaturabhängigkeit von a bzw. $\dot{a}$ im Avogadroschen Zustand steht in einfachem Zusammenhang mit derjenigen des II. Virialkoeffizienten B, nämlich:

$$B = b_A - \frac{a_A}{RT}. \quad (7)$$

$$\dot{a}_A = -R \frac{\partial B}{\partial 1/T}. \quad (8)$$

Außer unserer Voraussetzung der mechanischen Starrheit hat Keesom[2]) die weitere gemacht, daß die Moleküle elektrisch starre Quadrupole sind und er hat für solche die Temperaturabhängigkeit von B als Reihe abgeleitet. Die hieraus ermittelten Werte von a_A und $\dot{a}_A$ haben wir in Fig. 2 gestrichelt eingetragen. Für tiefe Temperaturen konvergiert diese Reihe nur sehr langsam. Für hohe Temperaturen wird zuerst die Voraussetzung der elektrischen Starrheit hinfällig, die Quadrupole werden vielmehr, worauf Debye[3]) zuerst hinwies, elektrisch polarisierbar, so daß ihre gegenseitige Anziehung größer als nach Keesom wird. Für höchste Temperaturen wird dann weiter — wir wir einleitend schon bemerkten —

1) Becker, Zeitschr. f. Phys. **4**, 393, 1921.

1) L. Schames, Zeitschr. f. Phys. **3**, 255, 1920.

2) Zusammenfassung von W. H. Keesom, diese Zeitschr. **22**, 129, 1921.

3) P. Debye, diese Zeitschr. **21**, 178, 1920.

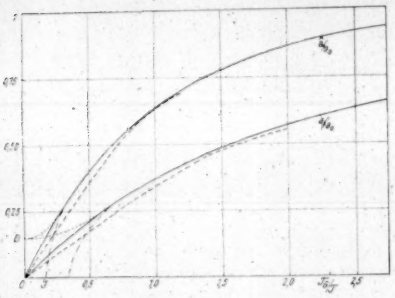


Fig. 2.

auch die Voraussetzung der mechanischen Starrheit hinfällig, so daß der einfache Zusammenhang (6) zwischen a und $\hat{a}$ nicht mehr gilt. Während ersteres im Sinne Debyes einen positiven Grenzwert etwa bei D erreicht, geht letzteres bei der Jouletemperatur J durch Null und wird für noch höhere Temperaturen negativ. Sehen wir von den höchsten Temperaturen ab, bei denen also unsere Voraussetzung nicht mehr gilt, so zeigt sich, daß die ausgezogenen empirischen Funktionen

$$\frac{\hat{a}_A}{a_0} = \hat{\alpha} = 1 - e^{-\frac{T_G}{T}} \tag{9}$$

und daraus nach (6)

$$\frac{a_A}{a_0} = \alpha = 1 - \hat{\alpha}\,\frac{T}{T_G} \tag{10}$$

sich gut zur Darstellung eignen, was wir später an dem mit ihnen berechneten II. Virialkoeffizienten des H_2 bestätigt finden.

Bei der Gay-Lussac-Temperatur gilt thermodynamisch die Bedingung $\frac{\partial B}{\partial T} = \frac{B}{T}$, also

$$\hat{a}_G = RT_G B_G. \tag{11}$$

Für unsere Funktion folgt dann

$$a_0 = RT_G b_A. \tag{12}$$

§ 3. Die Darstellung von b als Volumfunktion und von a_A als Temperaturfunktion genügt nicht; obwohl das schon lange bekannt[1]) ist, wird es noch häufig übersehen. Man muß vielmehr a auch noch als Volumfunktion darstellen; es ist dafür von verschiedenen Seiten verschiedene theoretische Begründung versucht worden[2]). Wir wollen hier dieser Frage empirisch näher zu kommen suchen und zwar wollen wir von der Funktion für a bzw. $\hat{a}$ verlangen, daß sie 1. die Kurve

$$\hat{a} = 0, \tag{13}$$

das ist die V. charakteristische Kurve[1]), auf der Gleichgewicht besteht zwischen den anziehenden Kräften einerseits und den abstoßenden Kräften und Temperaturbewegung andererseits und 2. eine möglichst ausgedehnte Isotherme für $\hat{a}$ richtig wiedergibt.

Die V. charakteristische Kurve geht allgemein durch den Punkt $p = 0$, $T = 0$, $v = v_0$. Für H_2 ist außerdem der Punkt für 0° C aus den Amagatschen Messungen gut bekannt. Beiden genügt die empirische Beziehung

$$\hat{\alpha} - \frac{v_0}{v} = 0 \tag{13a}$$

($\hat{\alpha}$ die durch (9) gegebene Temperaturfunktion).

Die $\hat{a}$-Isotherme für 0° C finden wir dann befriedigend dargestellt durch

$$\hat{a} = a_0\left(\hat{\alpha} - \frac{v_0}{v}\right)\varphi(v), \tag{14}$$

wo $\varphi_{(v)}$ nach (2a) gegeben. Fig. 3 zeigt uns die so berechnete Isotherme und die einzelnen von Amagat gegebenen Werte (Kreise). (Die gestrichelten Parallelen stellen (13a) geometrisch dar.) In Fig. 3 haben wir weiter auch die kontinuierliche Isotherme für $T = 0$ nach (14) eingezeichnet; diese muß drei Bedingungen ge-

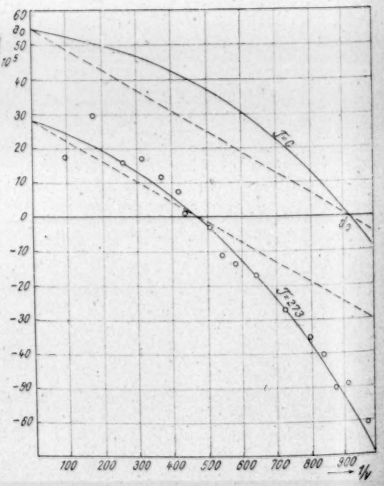


Fig. 3.

1) H. Happel, Ann. d. Phys. 13, 390, 1904.

2) Ein solch einfacher Zusammenhang zwischen der Volumenfunktion a und den Abstoßungskräften zwischen den Molekülen, wie ich ihn früher (Zeitschr. f. Phys. 2, 376, 1920) und dann auch Becker (l. c.) annahmen, ist für den gasflüssigen Zustand — im Gegensatz zum Kristall (Born) — nicht aufrecht zu erhalten.

1) L. Schames, Ann. d. Phys. 57, 321, 1918.

T	T_G/T	$\frac{b}{a}$	a	B. 10^5 ber.	B. 10^5 emp.*)	C. 10^8 ber.	C. 10^8 emp.*)
55,68	3,54	0,971	0,726	— 118,7	— 120,0	180	174
60,29	3,27	0,962	0,706	— 99,0	— 100,8	173	163
68,39	2,88	0,944	0,6725	— 70,7	— 69,2	162	135,5
77,82	2,53	0,921	0,636	— 46,0	— 43,2	150	111
90,28	2,182	0,8875	0,594	— 23,3	— 24,0	141	118
108,95	1,807	0,8855	0,537	2,15	1,84	128,5	104
133,21	1,480	0,772	0,479	22,1	22,9	117	83
169,52	1,162	0,686	0,410	39,6	39,3	104,5	84,5
273	0,721	0,515	0,289	59,9	58,0 (A) 61 (A) 62 (H)	82,0	— 99 (A) 70,5 (H)
373	0,5285	0,410	0,224	66,6	63,1 68 (A) 69,3 (H)	72,3	— 85 (A) 52,5 (H)
473	0,416	0,340	0,181	69,9	71 (A)	65,6	78 (A)

*) Die empirischen Daten ohne Bezeichnung sind die von Kamerlingh-Onnes und Braak, (A) bezeichnet diejenigen Amagats, (H) diejenigen Holborns.

nügen: 1. das richtige Grenzvolumen v_0 geben, was ja durch (13) gewährleistet ist, 2. muß das Integral $[\int_0^{d_0} a\,d\,d]_{T=0} = L_0$ sein, das ist der Fall, denn aus (14) folgt für das Integral $0{,}646\, a_0 d_0$, während aus dem Dampfdruck[1]) für

$$L_0 = 0{,}640\, a_0 d_0$$

folgt, 3. müßte ihre Neigung im Punkte d_0 die Kompressibilität der Flüssigkeit ergeben. Diese ist aber noch nicht gemessen.

In Anbetracht, daß die a_0-Kurve für die übrigen Substanzen nicht so einfach ist[2]), ist es zweifelhaft, ob die Kompressibilität richtig wiedergegeben wird, immerhin ist es aber möglich, daß für He und H_2 (für die auch v_0 wesentlich kleiner ist, vgl. die Tabelle im folgenden Vortrag) der Verlauf von a_0 wesentlich einfacher als für die übrigen Substanzen ist.

Aus (14) und (6) folgt

$$a = a_0\left(\alpha - \frac{v_0}{v}\right)\varphi(v). \qquad (15)$$

Die Zustandsgleichung für H_2 nimmt dann nach kurzer Rechnung die einfache Form an:

$$pv\left(1 - \frac{b}{v}\right) + \frac{a_0}{v}\left(\alpha - \frac{v_0}{v}\right) = RT, \qquad (16)$$

worin also b Volumen, α Temperaturfunktion ist.

§ 4. Aus (16) folgen für die Virialkoeffizienten der Reihenentwicklung

$$\frac{pv}{RT} = 1 + \frac{B}{v} + \frac{C}{v^2} + \frac{D}{v^3} + \dots \qquad (17)$$

unter Berücksichtigung von (12)

$$\left.\begin{aligned} B &= b_A\left(\varphi_1 - \frac{T_G}{T}\alpha\right), \\ C &= b_A^2\left[\varphi_2 + \left(\frac{v_0}{b_A} - \alpha\varphi_1\right)\frac{T_G}{T}\right], \\ D &= b_A^3\left[\varphi_3 + \left(\varphi_1\frac{v_0}{b_A} - \alpha\varphi_2\right)\frac{T_G}{T}\right]. \end{aligned}\right| \qquad (18)$$

Für T_G hatte Dalton[1]) 200,6° absolut abgeleitet, ich selbst[2]) hatte 194,5° hauptsächlich aus Obszewskis Messungen berechnet und denselben Wert hat Keesom (l. c.) erhalten. Berücksichtigt man jedoch noch die neuen Isothermenbestimmungen von Holborn[3]), so folgt als Mittelwert ein etwas höherer Wert $T_G \sim 197°$, wobei $B_G = 47{,}8 \cdot 10^{-5}$. Mittels (9), (11) und (12) folgt dann $b_A = 75{,}6 \cdot 10^{-5}$.

Mit diesen Werten haben wir nun die Virialkoeffizienten berechnet; wie die Tabelle zeigt, werden der II. und III. Virialkoeffizient genügend genau wiedergegeben.

Der III. Virialkoeffizient liegt durchschnittlich etwas höher als der — übrigens nicht regelmäßig verlaufende — von Kamerlingh-Onnes und Braak; das hat darin seinen Grund, daß Kamerlingh-Onnes aus rein empirischen Gründen D immer Null setzt. Das nach (18) berechnete D wird allerdings größer als mit den Messungen vereinbar ist. Dies kann in der eventuellen Ungenauigkeit der empirischen Funktion für a begründet sein. Da diese Abweichung bei tieferen Temperaturen zunimmt, könnte man

1) L. Schames, Zeitschr. f. Phys. **1**, 198, 1920.
2) L. Schames, Zeitschr. f. Phys. **2**, 376, 1920.

1) J. P. Dalton, Leiden Comm. Nr. 109a, 1909.
2) L. Schames, Elster- und Geitel-Festschr. 1915, S. 287.
3) L. Holborn, Ann. d. Phys. **63**, 674, 1920.

auch daran denken, daß sich hier ein Quanteneffekt bemerkbar macht, dem man durch Einführung einer Variablen an Stelle von R Rechnung tragen könnte. Wir hoffen hierauf später zurückzukommen.

E. Reichenbächer (Wilhelmshaven), Massenunabhängige Schwere-Felder in der allgemeinen Relativitätstheorie.

Die allg. Rel.-Th. hat zuerst den Ausspruch gewagt, daß die Maße des Raumes und der Zeit von der in der Welt vorhandenen Materie und ihrer Bewegung abhängig sind: „Alle Massen der Welt zusammen bestimmen das $g_{\mu\nu}$-Feld" (des Raumzeitkontinuums), „und dieses ist, von einem Weltkörper aus beurteilt, ein anderes als von einem zweiten aus beurteilt, weil ja auch die Bewegungen jener das $g_{\mu\nu}$-Feld erzeugenden Massen, von beiden Systemen aus beschrieben, höchst verschieden sind" (A. Einstein, Naturwiss. 8, H. 51, S. 1011, 1920). Es liegt nun die Frage nahe, ob wir nicht durch die Annahme, daß „die aus dieser Voraussetzung fließenden $g_{\mu\nu}$ das Gravitationsfeld beschreiben", in Widerspruch gebracht werden mit der bisherigen Auffassung, daß die Gravitationsfelder an sie „erzeugende" Massen geknüpft sind ähnlich wie die elektromagnetischen Felder an elektrisch geladene Teilchen und, wenn dieser Widerspruch bestehen sollte, wofür wir uns zu entscheiden haben.

Zunächst kann es keinem Zweifel unterworfen sein, daß es in Gedanken möglich ist, ein Weltbild im Sinne der allg. Rel.-Th. zu entwerfen, das ein von „erzeugenden" Massen unabhängiges Gravitationsfeld enthält. Das bekannteste Beispiel eines solchen ist das System der gleichförmigen Rotation in der Minkowskiwelt, wie es insbesondere von Kottler aufgestellt und durchgerechnet worden ist (Über d. physik. Grundlagen d. Einsteinschen Gravit.-Th., Ann. d. Phys. 56, S. 401, 1918, Abschn. 37 u. 38. — Rotierende Bezugssyst. in einer Minkowskischen Welt, Phys. Ztschr. 22, S. 274, 1921). In diesem Felde treten völlig massenunabhängige Wirkungen, nämlich die bekannten Coriolisschen und Zentrifugalkräfte auf, wie es ja nach der Rel.-Th. auch nicht anders sein kann. Von deren oben gekennzeichnetem Standpunkte aus aber müssen nun diese Wirkungen als Gravitationswirkungen angesehen werden, obwohl von feld-erzeugenden Massen gar nicht die Rede ist; die Welt sollte doch gerade rein Minkowskisch bleiben.

Ein noch einfacheres Beispiel eines gedachten massenunabhängigen Gravitationsfeldes innerhalb der Minkowskiwelt bietet aber schon das System der — rein gleichförmigen Bewegung dar, wenn man nur, wie das nach der allg. Rel.-Th. nicht nur zulässig, sondern sogar geboten ist, im Raum ein ganz beliebiges, also nicht notwendig Kartesisches Koordinatensystem zugrunde legt. In einem solchen System verschwinden natürlich die Einsteinschen Komponenten $\Gamma^{\iota}_{\mu\nu}$ des Gravitationsfeldes nicht mehr sämtlich, und es treten dann natürlich auch, wie es die Rel.-Th. verlangen muß, „Kräfte" auf, die auf der Abweichung der Parameterlinien von der Geraden beruhen und selbstverständlich völlig massenunabhängig sind.

Allgemein kann man sagen, daß innerhalb der Minkowskischen oder irgendeiner anderen Raumzeitmannigfaltigkeit die auftretenden Kräfte je nach der Wahl des Koordinatensystems sich ändern, daher notwendigerweise nicht von etwa vorhandenen Massen allein abhängig sind. Hiermit ist die Möglichkeit gegeben, von den nur gedachten Mannigfaltigkeiten zu den Verhältnissen der wirklichen Welt überzugehen. In dieser würde man demnach, wenn man auch einmal annimmt, daß die $g_{\mu\nu}$ durch die in der Welt vorhandenen Massen bestimmt sind, sie doch durch die völlig willkürliche Wahl des Koordinatensystems wieder ändern können. Ist diese Änderung nun nicht auch völlig willkürlich, da infolge der Transformation der Koordinaten nur ein dem ursprünglichen äquivalentes $g_{\mu\nu}$-System zulässig ist, so ist man doch berechtigt zu sagen, daß es durch die in der Welt vorhandenen Massen nicht ausschließlich bestimmt, sondern nur beeinflußt ist.

Worin soll sich nun aber deren Einfluß auf die Raum- und Zeitmaße, also auf die Komponenten $g_{\mu\nu}$ des Fundamentaltensors äußern? Dieser Einfluß ist die Grundlage der 4-dimensionalen Gravitationstheorie; aber man kann ihn in zweierlei Weise auffassen, und diese Auffassungsmöglichkeiten sind leider nicht immer auseinandergehalten worden.

Einmal kann man das Hauptgewicht auf den Bewegungszustand der Materie legen; diese Auffassung liegt z. B. auch der von Mach übernommenen Ansicht zugrunde, daß die Rotation keine absolute Bewegung sei, sondern nur relativ zu Bezugskörpern in Betracht käme, als welche die Fixsterne, von deren gegenseitiger Bewegung abgesehen wird, angenommen werden. Diese Beziehung auf das Trägheitssystem der Sterne identifiziert man

mit der Gravitation. Das „Gravitationsfeld" der Fixsterne ist aber im Grunde genommen nichts als ein bevorzugtes Koordinatensystem, in dem diese ruhen (oder sich gleichförmig bewegen). Die Wahl irgendeines anderen Systems hat dann das Auftreten von „Feldkomponenten" $\Gamma^{\iota}_{\mu\nu}$ zur Folge und löst demnach „Gravitationswirkungen" aus, die wenigstens indirekt auf jene „felderzeugenden" Massen zurückgeführt werden.

Es muß in die Augen fallen, daß damit nach der allg. Rel.-Th. die Existenz der fernen Massen, wohlgemerkt nur die Existenz, nicht die Größe, eine notwendige Voraussetzung für die Bestimmtheit der Gestalt eines flüssigen Weltkörpers wird. Diese würde völlig unbestimmt werden, wenn die fernen Massen fehlen, da in einer solchen Welt jedes Koordinatensystem gleichberechtigt wäre und der Begriff der Rotation vieldeutig würde. Dies Bedenken hat Kopff veranlaßt (Naturwiss. **9**, H. 1, S. 9, 1921), die Einsteinschen Feldgleichungen ohne das kosmologische Glied als mit der Rel.-Th. unverträglich zu verwerfen und die Hinzufügung dieses Gliedes als notwendige Vorbedingung für diese Theorie zu bezeichnen. Das trifft aber nicht den Kernpunkt der Sache, da auch bei Annahme der Gleichungen 2. Art die Existenz ferner Massen nicht notwendig ist, sondern einer besonderen unabhängigen Annahme bedarf genau so wie bei denen 1. Art. Dies Vorhandensein ferner Massen ist demnach die einzige notwendige Voraussetzung für die Existenz von „Gravitationsfeldern" nach dieser Auffassung; aber diese Felder sind nichts als bevorzugte Koordinatensysteme, d. h. eben Trägheitssysteme. In anderen Systemen, vor allem in denen, die gegenüber den ruhend vorausgesetzten Fixsternen rotieren — eine Voraussetzung, die übrigens in voller Genauigkeit, nicht nur annähernd, erfüllt sein müßte —, treten dann die bekannten Zentrifugalkräfte auf, was ganz natürlich ist, da ihr Nichtvorhandensein der Rel.-Th. widerspräche. Bei der Aufstellung dieser Systeme übersieht man aber meistens, daß es sich nicht um sogenannte Ruhsysteme handeln kann, da die Schar der Weltlinien gleichförmiger Umdrehung mit derselben Winkelgeschwindigkeit keine orthogonalen Trajektorienräume zuläßt, oder aber man sieht von der bloßen Transformation ab, indem man die Raumzeitmannigfaltigkeit selbst mit dem Bezugssystem ändert. Daher kann man dieser ersten Auffassung des Masseneinflusses auf das $g_{\mu\nu}$-Feld nicht ohne schwere Bedenken gegenüberstehen.

Aber hiermit ist auch in der Einsteinschen Theorie der Einfluß der Massen auf das Feld nicht erschöpft; das zeigt die Behandlung des Feldes des ruhenden Massenpunktes, wo ganz wie bei Newton eine massenproportionale Wirkung eintritt. Diese ist aber, was meines Erachtens nicht genug hervorgehoben ist, hervorgebracht von einer durch die Masse erzeugten Veränderung oder Verzerrung der Raumzeitmannigfaltigkeit. Ohne sie ist es unnötig, das Minkowskikontinuum aufzugeben; ohne sie gäbe es aber auch keine Erklärung des Planetenumlaufs. Auf ihr beruht auch die Mitführung des Feldes in der Thirringschen Lösung des Rotationsproblems, und es würde meiner Ansicht nach irreführend sein, auf diese doch immerhin recht kleine, mit der geringen Vorrückung der Planetenperihele durchaus wesensgleiche Wirkung die Behauptung begründen zu wollen, daß die Fixsterne die Drehungsebene des Foucaultschen Pendels mitnähmen; denn die Winkelgeschwindigkeiten würden zu ungleich.

Nun ist es klar, daß die spezifisch Newtonschen Wirkungen nur auf dieser zweiten Funktion der Massen beruhen, während die erste nur zu den sogenannten Trägheitskräften führt. Die Erklärung der Newtonschen Kräfte ist aber erst möglich, wenn man die Möglichkeit der Abänderung der Raumzeitmannigfaltigkeit durch die Massen zuläßt. Das ist aber ein der Rel.-Th. eigentlich durchaus fremder Begriff, und man kommt zu ihm nur, wenn man den Begriff der allgemeinen Kovarianz weiter auffaßt, als ihm eigentlich zukommt, daß nämlich die $g_{\mu\nu}$ nicht nur in äquivalenter Weise, sondern ganz beliebig geändert werden können, so daß neben die Koordinatentransformation mit ihren Trägheitswirkungen auch die Verzerrung des Kontinuums mit ihren Newtonschen Wirkungen tritt. Weshalb wollen wir nun nicht nur diese, sondern auch jene als Gravitation bezeichnen? Die Behauptung der allg. Rel.-Th., Schwere und Trägheit wären dasselbe, wird nur der einen Seite der Tatsachen gerecht, nämlich dem Verhalten der Massen unter Einwirkung des Feldes; sie verstößt aber gegen die andere Seite, da sie nichts über die Einwirkung der Massen auf das Feld aussagt.

Selbstverständlich setzt der Gedanke, daß die Massen das Feld verzerren, um die Newtonschen Wirkungen hervorzubringen, voraus, daß sie nicht nur passiv den Angriffen des Feldes unterliegen, sondern auch ihrerseits aktiv dieses beeinflussen. Damit geht man aber über die reine Feldtheorie hinaus, wie das auch von Weyl in seiner kürzlichen Veröffentlichung „Feld und Materie" (Ann. d. Phys. **65**, S. 541, 1921) betont wird. Die Massen können

nicht mehr nur Singularitäten des Feldes sein, sondern müssen etwas neben ihm Bestehendes, gewissermaßen mit ihm völlig Gleichberechtigtes sein. Faßt man sie nur als Stellen des Feldes auf, die sich durch abweichende Eigenschaften, z. B. in der Krümmung, von den anderen unterscheiden, so sieht man nicht recht ein, weshalb ihnen die beherrschende Stellung zukommen soll, die Einstein ihnen in seinen Bezugskörpern zuweist. Vor allem dann nicht, wenn man mit Mie sie von äußerst feinen, sich bis ins Unendliche erstreckenden Atmosphären umgeben sein läßt, in denen die materiellen Eigenschaften, d. h. Masse und Ladung, allmählich abklingen. Wie es möglich ist, die Massen außerhalb des Feldes zu stellen, glaube ich in meiner Arbeit über „Schwere und Trägheit" (Phys. Ztschr. 22, H. 8, S. 234, 1921) gezeigt zu haben, wo ich die Auffassung vertrat, daß gerade der Einsteinsche Ansatz für das Feld eines Massenpunktes uns dazu zwingt, das Feld in einer kleinen endlichen Entfernung von diesem aufhören zu lassen, so daß es also hier seinen einfachen Zusammenhang verliert, also gewissermaßen ein Loch bekommt. Ich freue mich, diese meine Ansicht vom Wesen der Materie von Herrn Weyl aufgegriffen, unterstützt und weitergeführt zu sehen.

Von dem so gekennzeichneten Standpunkt aus sind demnach die beiden Arten von Wirkungen, nämlich die der Trägheit und die der Newtonschen Gravitation, deutlich verschieden. Diesem Unterschiede aber wird die allg. Rel.-Th. nicht gerecht; ja es ist überhaupt nicht recht einzusehen, wie sie dazu kommt, die Newtonschen Felder zu erklären. Sie erfaßt das Wesen der Gravitation nicht bis in die letzten Konsequenzen; trotzdem ist sie natürlich in sich nicht ohne Berechtigung und Wert. Ob allerdings auch alle Einzelheiten der Einsteinschen Theorie aufrecht erhalten werden können, erscheint mir zweifelhaft, da insbesondere auch dann „Feldkomponenten" in ihr auftreten, wenn keine Newtonschen Kräfte vorhanden sind.

Diskussion.

Frank: Massenunabhängige Felder treten auch in der Newtonschen Theorie auf. Das homogene Schwerefeld kann nicht durch im Endlichen liegende Massen erklärt werden.

Reichenbächer: Dies homogene Gravitationsfeld ist zu gleicher Zeit das einzige, das mit einem Trägheitsfeld, nämlich mit dem der gleichmäßig beschleunigten Translation übereinstimmt. Die wirklich vorhandenen Schwerefelder sind sämtlich anderer Art.

H. Fricke (Berlin), Ein neuer Weg zur Aufklärung des Äther- und Schwerkraftproblems.

Der leitende Gedanke meiner Arbeiten über Äther und Schwerkraft war die Überzeugung, daß die vielen in neuerer Zeit gegen einen fühlbaren, substantiellen Äther erhobenen Einwände einer sachlichen Kritik nicht standhalten. Die ausführliche Begründung dieses Standpunktes habe ich in meinen am Schluß angeführten Arbeiten gegeben. Die angeblichen Schwierigkeiten rühren meines Erachtens davon her, daß man im Anschluß an die Elektronentheorie von Lorentz die beiden Begriffe „Kraftfeld" und „Äther" voneinander getrennt hat. Man führte neben den fühlbaren Kraftfeldern, die nach der älteren Theorie als Ätherwirbelfelder verwickelter Bauart aufgefaßt wurden, noch einen „absolut ruhenden" Äther ein. Eine solche Vorstellung lag der alten Äthertheorie durchaus fern und mußte naturgemäß zu Widersprüchen führen, die zu Unrecht dem Äther zur Last gelegt wurden.

Die Vorstellung des substantiellen, fühlbaren und mechanisch wirksamen Äthers erscheint mir als eine für die Physik unentbehrliche Arbeitshypothese. Ob man dabei die atomistische Form einer kinetischen Gastheorie bevorzugt, wie es L. Zehnder tut, oder die Atome nach der Ätherwirbeltheorie wiederum als Wirbelbildungen im kontinuierlichen Äther auffaßt, wie ich es für vorteilhafter halte, ist zunächst von geringerer Bedeutung. Die praktische Bedeutung der Äthervorstellung läßt sich besonders am Schwerkraftproblem zeigen.

Versucht man die abstrakte Theorie Newtons mit anschaulichen Vorstellungen auszufüllen und sich von den Schwerkraftlinien ein Modell zu machen, so ergeben sich dafür zwei Möglichkeiten. Einmal kann man die Kraftlinien als gespannte Federn ansehen, ähnlich wie es Faraday getan hat. Zweitens kann man sie als die Wirkung eines feinen, sehr durchdringenden „Ätherwindes" auffassen. Beide Wege sind vielfach beschritten worden. Die erste Vorstellung sieht in der Schwerkraft eine ruhende, statische Spannung ohne Arbeitsleistung. Sie entspricht den mathematischen Darstellungen Newtons und den Anschauungen, die Faraday und Lorentz über das elektrische Feld entwickelt haben. — Die zweite Vorstellung läßt sich sowohl an die kinetische Gastheorie des Äthers anschließen wie an die Ätherwirbeltheorie; sie liegt der Stoßtheorie des Le Sage (1724—1803) sowie vielen neueren Theorien zugrunde.

Es ist nun bisher wenig beachtet worden, daß die beiden Vorstellungen bei ihrer Durch-

führung zu ganz verschiedenartigen Folgerungen führen, die leicht zu einer Entscheidung benutzt werden können. Wird die Schwerkraft, wie man bei der Vorstellung zweiter Art annimmt, durch einen Ätherwind oder Ätherstoß hervorgerufen, so muß sie mit einer dauernden Energieabsorption durch die schweren Massen verbunden sein. Maxwell glaubte aus dieser Folgerung einen vernichtenden Einwand gegen die Theorie von Le Sage ableiten zu können. Wie jedoch Drude auf dem Braunschweiger Naturforschertage („Über Fernwirkungen", Ann. d. Phys. **62**, XLff., 1897) ausführte, ergibt gerade diese Energieabsorption eine vortreffliche Erklärung für die sonst schwer verständliche Konstanz der Fixsterntemperaturen und die Herkunft der Sonnenwärme. Hierauf hat wohl als erster Leray 1869 hingewiesen (Compt. Rend. **69**, 615). Der Gedanke ist jedoch auch von anderer Seite weiter verfolgt worden, neuerdings auch von E. Wiechert. Es handelt sich hier um ein Problem, dessen Lösung die ganze Astrophysik — vielleicht sogar die ganze Physik — auf eine neue Grundlage stellen würde, das daher wohl eine größere Beachtung verdient, als ihm bisher zuteil geworden ist. Ich glaube nun hier einen neuen Angriffspunkt entdeckt zu haben in der eigentümlichen Proportionalität, die in unserm Planetensystem offensichtlich zwischen der Temperatur und der Schwerkraft besteht. Die Beziehung ergibt sich auf Grund der folgenden Berechnung. Die mittlere Oberflächentemperatur der Erde beträgt etwa 15° C oder 288° abs.; man kann nach Scheiner 88° davon als Wirkung der Sonnenstrahlung auffassen, so daß die Eigentemperatur der Erde mit 200° abs. anzusetzen wäre. Diese Zahl (— 73°) stimmt auch gut mit den in den höchsten Luftschichten gemessenen Temperaturen überein. Auf der Sonne ist die Schwerkraft rund 28 mal so groß, dort müßte also eine Temperatur von 5600° herrschen, eine Zahl, die der auf der Sonne wirklich beobachteten Temperatur (von etwa 6000°) überraschend nahe kommt. Für die Eigenwärme des Mondes ergibt diese Rechnung einen Wert, der dem absoluten Nullpunkt bis auf 32° nahe kommt, was ebenfalls mit der Beobachtung gut im Einklange steht. Auch für die übrigen Planeten ergeben sich plausible Werte, die zum Teil sogar bisher unerklärte Phänomene (wie das schneeweiße Aussehen der Venus) der Aufklärung zuzuführen scheinen.

Die vollständige theoretische Aufklärung der Proportionalität ist vielleicht nicht einfach; doch trifft der Einwand, Temperatur und Schwerkraft seien so verschiedenartige Begriffe, daß eine Beziehung zwischen ihnen ausgeschlossen erschiene, wohl nicht zu. Die Temperatur wird bekanntlich als Stoßenergie der ponderablen Materie aufgefaßt; die Schwerkraft ist vermutlich die Stoßenergie der Ätherteilchen (oder der „ultramundanen Korpuskeln" des Le Sage). Vom Standpunkt der Ätherstheorie aus ist eine Beziehung daher recht wohl verständlich. Die Energie scheint im Schwerkraftfelde einen vollständigen Kreislauf auszuführen, indem sie als Schwerkraft vom Äther auf die Massen übertragen wird, von diesen aber als Wärme oder auch als Trägheitsstoß größerer Massen an den Äther zurückgegeben wird. Die Massen würden für die im umgebenden Raume vorhandenen Kräfte also in gleichem Maße „Quellen" wie „Senken" sein. Der Kraftfluß in den Kraftfeldern würde sich dann vermutlich als ein wirklicher Energiefluß auffassen lassen, gleichzeitig würden diese Erscheinungen auch als Strömung und Wirbelbewegung des inkompressiblen Äthers zu deuten sein. Die Kraftlinien wären also wirkliche Strömungslinien des Äthers, wenn auch ihre verwickelte Bauart vorläufig noch nicht erkennbar sein sollte.

Neuerdings sind von O. Wiener (Abh. d. math.-phys. Kl. d. Sächs. Akad. d. Wissensch. **38**, H. 4) neben den gewöhnlichen Massen, die als „schwerig" oder „barisch" bezeichnet werden, noch „gegenschwerige" oder „antibarische" Massen im Raume angenommen worden. Ähnliche Vorschläge sind schon früher von Pearson und Föppl gemacht worden. Diese Frage scheint nun dadurch eine einfache Lösung zu finden, daß die Wechselwirkungen zwischen Masse und Raum oder Äther nach der hier entwickelten Vorstellung stets in zwei entgegengesetzten Richtungen erfolgt, so daß die gewöhnliche Masse einerseits als schwere, andererseits als träge Masse bereits im positiven und gleichzeitig im negativen Sinne in der Himmelsmechanik zur Wirkung gelangt. Die mittlere Massendichte könnte dann im Weltraum tatsächlich Null sein, und die gegen die Unendlichkeit der Welt erhobenen Einsprüche würden widerlegt sein.

Wenn im vorliegenden Falle die Schwerkraft ganz einfach als eine fühlbare, substantielle Kraftströmung gedeutet wird, so bedarf es einer Erklärung, warum Newtons übersinnliche Darstellung einer zeit- und widerstandslosen Kraft sich in der Rechnung so gut bewährt. Ich suche die Erklärung in dem Umstande, daß Newtons Formel nie allein auf die Schwerkraft, sondern stets nur auf das Zusammenwirken von Schwere und Trägheit angewendet ist. Man kann also ohne erhebliche Änderungen des bewährten mathematischen Gerüstes die unwahrscheinliche Grundanschauung Newtons über die Schwere durch Einführung substantieller

Widerstände ausfüllen, wenn man auch bei der Trägheitsbewegung nicht einen leeren Raum, sondern ein widerstehendes Mittel annimmt, das infolge seiner Eigenbewegung natürlich auch beschleunigend wirken kann.

Ein logischer Widerspruch scheint mir in der Annahme Newtons enthalten zu sein, daß die Schwerkraft Massen beschleunigt, durch die sie widerstandslos hindurchgehen soll. Eine Kraft kann aber nur da wirken, wo sie auf Widerstand stößt. Offenbar treten beim Zusammenwirken von Schwerkraft und Trägheitswiderstand auch fühlbare Widerstände, Spannungen und Reibungen auf, die jedoch von entgegengesetzt gleicher Größe sind und sich daher herausheben. Ein Beweis für diese Auffassung erblicke ich, wie hier nur angedeutet werden kann, in der täglichen Doppelschwingung des Barometers in den Tropen, der sogenannten Ebbe und Flut der Luft. Es handelt sich dabei um Kräfte, die die von den Gezeiten des Meeres her bekannten vielleicht um das hundertfache übertreffen und die Hauptursache von Wind und Wetter, sowie von anderen bisher unerklärten geophysikalischen Erscheinungen sein dürften. Da eine befriedigende Erklärung auf Grund der alten Theorie von Newton bisher nicht gegeben wurde, scheint hier ein zweiter wichtiger Angriffspunkt für eine Reform der Schwerkraftslehre gefunden worden zu sein. (Näher ausgeführt in der „Naturwissenschaftlichen Wochenschrift" 1921, Heft 7.)

Durch die Einführung eines fühlbaren Äthers wird die Schwerkraftslehre wieder mit der älteren Himmelsmechanik und Wirbeltheorie des Descartes verbunden, aus der im Jahre 1732 der Mathematiker Johann Bernoulli die Keplerschen Gesetze abgeleitet hat.

Die Ursache dafür, daß die noch zur Zeit von Hertz in hoher Blüte stehende Wirbeltheorie des Äthers so plötzlich verlassen worden ist, liegt meines Erachtens an einem leicht aufzuklärenden Mißverständnis. Man glaubte im Anschluß an die Theorie von Lorentz den Äther als einen absolut ruhenden festen Körper auffassen zu müssen, der sich an den in ihm stattfindenden Bewegungen der Materie in keiner Weise beteiligte. Eine solche Vorstellung bedeutete natürlich den Tod jeder anschaulichen Äthertheorie. Nach der Ätherwirbeltheorie muß man dagegen eine Beteiligung des Äthers an den Bewegungen der Massen annehmen. Es zeigt sich nun, daß dieselben Erscheinungen, die Lorentz zur Vorstellung vom absolut ruhenden Äther geführt haben, auch im Sinne einer Mitführungstheorie gedeutet werden können. Man braucht nämlich nur anzunehmen, daß die die Massen begleitenden Strömungsfelder sich gegenseitig durchdringen. Dann ist bei der Bewegung einer jeden Masse auf der Erde gleichzeitig noch der zur Erdmasse gehörige Äther (der vielleicht mit dem Schwerkraftfeld identisch ist) zu berücksichtigen, und da die auf der Erde bewegten Massen gegenüber der Erdmasse fast stets unendlich klein ist, scheint der Äther bei irdischen Versuchen zu ruhen. Diese Ruhe ist jedoch im Sinne von Hertz als eine Bestätigung der Mitführung des Äthers durch die ponderable Materie aufzufassen.

Neuerdings haben sich auch Gehrcke (Verh. d. D. Phys. Ges. 1918, S. 165; 1919, S. 67) und Lenard (Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. 17, H. 4) wieder für eine Mitführung des Äthers durch die Erde ausgesprochen. Danach stehen der Deutung des Michelsonschen Versuchs im Sinne der alten Äthertheorie keine Schwierigkeiten mehr entgegen. In der Zentralzeitung für Optik und Mechanik (42. Jahrg. Nr. 25 vom 1. 9. 1921, S. 337) hat Strehl darauf hingewiesen, daß alle optischen Versuche mit bewegten und ruhenden Lichtquellen sich vortrefflich mit der Ätherwirbeltheorie in Einklang bringen lassen.

Ich glaube daher, daß man zu der von Maxwell, Helmholtz, Hertz, Lord Kelvin u. a. ausgebauten Ätherwirbeltheorie im Prinzip zurückkehren muß. Die Elektronen sowie die Ätheratome der kinetischen Gastheorie lassen sich als Wirbel in einer inkompressiblen Flüssigkeit deuten, so daß die betreffenden Theorien nicht aufgegeben zu werden brauchen, sondern nur umfassenderen Gesichtspunkten untergeordnet werden. Wenn die alte Äthertheorie noch in mancher Hinsicht unbefriedigend war, so scheint mir das an einem Fehler in den Grundlagen zu liegen, nämlich an der Einführung des Begriffs der „reibungslosen" Flüssigkeit, in der sich Schichten widerstandslos gegeneinander verschieben sollen. In Wirklichkeit läßt sich der Begriff der Reibung oder Viskosität aus der Kontinuität ableiten, darf daher nicht vollständig vernachlässigt werden, wie auch Maxwell sein Äthermodell gerade aus Friktionsrädern aufgebaut hat. Man wird die Ursache für die scheinbar atomistische Struktur des Äthers daher nicht in Wirbelgebilden sehen dürfen, die von ihrer Umgebung getrennt sind und reibungslos in ihr gleiten, sondern wird gerade auf den bisher wenig beachteten Zusammenhang in den Strömungsgebilden das Augenmerk richten müssen. An Stelle der theoretischen Betrachtungen über reibungslose Flüssigkeiten wird man die Beobachtung natürlicher Flüssigkeiten setzen, die infolge einer unzerstörbaren inneren Bewegung sich in sich selbst verwälzen. Wirbelgebilde, die den Ätherwirbeln

vermutlich entsprechen, sind nun neuerdings von Th. Rümelin bei Beobachtung des „Normalzustandes des Fließens" in breiten Gerinnen entdeckt worden. („Wie bewegt sich fließendes Wasser? Ein neuer Weg zur Erklärung des Problems." Verlag von v. Zahn & Jaensch, Dresden 1913.) Der Fluß schien sich in kugelartige Gebilde aufzulösen, die abwechselnd im entgegengesetzten Sinne rotierten und dabei rhythmisch pulsierend ihr Volumen vergrößerten und verkleinerten, so als ob sie elastische Schwingungen ausführten. Die scheinbar elastischen positiven und negativen Atome scheinen also ganz regelmäßig als Folge des „Normalzustandes des Fließens" in einer nach verschiedenen Richtungen durcheinanderströmenden unelastischen Flüssigkeit aufzutreten. Lediglich der Umstand, daß Fließbewegungen dieser Art wenig erforscht waren, hat die Vorgänge im Äther bisher widerspruchsvoll und dunkel erscheinen lassen.

Danach wäre also der Äther als eine inkompressible Flüssigkeit mit unzerstörbarer, unveränderlicher Eigenbewegung aufzufassen, deren Geschwindigkeit von der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit ist. Eine ähnliche Theorie ist neuerdings von O. Wiener unter dem Titel „Das Grundgesetz der Natur und die Erhaltung der absoluten Geschwindigkeiten im Äther" veröffentlicht worden (Abh. d. sächs. Akad. d. Wissensch. **38**, H. 4). Baut man die Theorie Wieners noch weiter aus, indem man die Eigenbewegung der Ätherteilchen überall gleichartig und von der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit annimmt, so erhält man ein Grundgesetz, das mit den Grundlagen der Relativitätstheorie eine große formale Ähnlichkeit zeigt. Nur ist das logisch nicht recht haltbare „Gesetz von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit relativ zu verschiedenartig bewegten Beobachtern" durch das einfachere Gesetz von der Konstanz der inneren Eigenbewegung des Äthers ersetzt. Die Grundlagen der Relativitätstheorie würden durch eine solche Umformulierung wieder in Einklang mit dem gesunden Menschenverstand und der Äthervorstellung gebracht werden. Einstein hat in seinem Leidener Vortrage (Verlag von Springer, 1920) auch bereits nach einer solchen Verbindung gesucht, indem er geprüft hat, wie die Ätherтheorie abzuändern wäre, wenn sie mit seiner Relativitätstheorie in Einklang gebracht werden sollte. Er ist dabei aber zu einer begrifflich nicht recht faßbaren Definition des Äthers gekommen. Natürlicher und richtiger wäre es wohl gewesen, zu untersuchen, wie die Grundlagen der Relativitätstheorie abzuändern wären, damit diese sich in eine einfache Äthervorstellung einfügen lassen könnte. Eine solche Verbindung würde die deutsche Wissenschaft voraussichtlich zu großen und unerwarteten Erfolgen führen können. Ein Grund zur Aufgabe der substantiellen Ätherтheorie ist meines Erachtens nirgends erkennbar. Diese scheint vielmehr besser als jede andere Vorstellung zur einfachen Lösung physikalischer Probleme berufen zu sein.

Die eingehende Begründung des hier entwickelten Gedankenganges findet sich in den folgenden Schriften des Verfassers:

„Eine neue und einfache Deutung der Schwerkraft." Wolfenbüttel, Heckners Verlag, 1919.

„Der Fehler in Einsteins Relativitätstheorie" und „Die neue Erklärung der Schwerkraft". Ebenda, 1920.

„Eine neue und anschauliche Erklärung der Physik des Äthers." Glasers Annalen für Gewerbe- und Bauwesen, Bd. 86, Nr. 1032, S. 95/96.

„Wind und Wetter als Feldwirkungen der Schwerkraft." Naturwiss. Wochenschrift, 1921, Heft 7, S. 97.

„Klassische Mechanik, Relativitätstheorie oder Ätherphysik? Eine Kritik der Newtonschen Gravitationstheorie." Astronomische Zeitschr. 1921, Heft 3, S. 31.

„Michelson und Einstein." Zentralzeitung für Optik u. Mechanik, 42. Jahrg., Nr. 24, S. 363.

Diskussion.

Gehrcke: Ein Vertreter der vom Herrn Vortragenden vorgebrachten Ansicht, daß die Gravitation eine Strömung im Äther sei, war der große Mathematiker Riemann. Riemann stellte sich vor, daß eine gravitierende Masse den Äther aus ihrer Umgebung ansaugt und daß das Zentrum der Strömung eine Senkerstelle ist. Man kann nun nach der experimentellen Prüfung dieser Ansicht fragen, und da möchte ich auf den Michelsonschen Spiegelversuch hinweisen. Dieser ist bisher stets so angestellt worden, daß die Apparate um eine vertikale Achse gedreht wurden und hierbei fallen natürlich alle Strömungskomponenten in Richtung der Schwerkraft heraus. Wenn man aber den Versuch so wiederholen würde, daß die Apparate um eine horizontale Achse gedreht werden, so könnte man die Ätherströmungstheorie der Gravitation prüfen.

BESPRECHUNGEN.

Harry Schmidt, Probleme der modernen Chemie. 148 Seiten mit 9 Figuren. I. Auflage. Hamburg, L. Friederichsen & Co. 1921. Geheftet 15 M., gebunden 20 M.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, die wichtigsten Arbeiten von Aston, Fajans, Kossel, Paneth, Rutherford und Soddy einem weitern Kreise, insbesondere Nichtfachleuten in leichtfaßlicher Form zugänglich zu machen.

Das einleitende Kapitel behandelt etwas romantisch den Gedankenkreis der Alchemisten und leitet über zum Lavoisier-Daltonschen Standpunkt. Es folgt die Entwicklungsgeschichte der Radiologie und die Behandlung ihrer Meßmethoden. Etwas zu kurz gefaßt ist wohl für den Nichtfachmann die Behandlung der natürlichen und künstlichen Corpuscular- und Wellenstrahlung. Der genetische Zusammenhang der aktiven Produkte wird an Hand der Rutherford-Soddyschen Zerfallstheorie klargelegt, unter dem Zweck des Buches angemessener Beschränkung (Doppelzerfall der C-Produkte, Ac-Genesis). An Hand der Elektrolyse und des Photoeffekts erfolgt der Nachweis, daß das Elektron ein allgemeiner Baustein der Materie ist. Ein kurzer Hinweis auf den Zusammenhang zwischen Energie und Trägheit wird wohl der knappen Fassung wegen unverstanden bleiben. Ein spezielles Kapitel ist der Valenzlehre und dem periodischen System gewidmet. Eine kurze Behandlung des periodischen Systems vom chemischen und hernach mit dem van dem Broekschen Gesetz vom physikalischen Standpunkt leitet über zu der Kossel-Bohrschen Vorstellung vom Aufbau der Elemente zu Perioden und führt zur Deutung der Valenz als der Tendenz zum Edelgaszustand. Im 6. Abschnitt macht uns der Verfasser bekannt mit dem Isotopiebegriff und den Ergebnissen der Astonschen Arbeiten am Massenspektrographen, und dann noch eingehend die Arbeiten Paneths über Mikrosynthese von BiH_3 und PbH_2 zu würdigen. Den Schlußstein bildet die Rutherfordsche N_2-Zerlegung, womit ein harmonischer Abschluß gewonnen ist.

Die letzten Partien des Buches leiden oft etwas unter der Knappheit, so daß hin und wieder an Stelle des Beweises Zitate treten, deren autoritative Wirkung die Kürze kompensieren soll.

P. Frauenfelder.

Vorlesungsverzeichnis für das Wintersemester 1921/22.

Technische Hochschule Berlin. Kurlbaum: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Allgemeine Strahlungsenergie (Optik); Physikalische Übungen; Ausgewählte physikalische Aufgaben für Vorgeschrittene. — **Berndt:** Radioaktivität. — **Cranz:** Über mechanische und photographische Messungs- und Registriermethoden der technischen Physik; Ausgewählte Kapitel aus der neueren Physik: Atomphysik und Ätherphysik, Relativitätstheorie, Elektronentheorie, Quantentheorie. — **Felgentraeger:** Maß- und Gewichtswesen I; Die Konstruktion der Spiegel- und Linseninstrumente. — **Gehlhoff:** Physikalische Grundlagen der Beleuchtungstechnik. — **Grunmach:** Magnetische und elektrische Maßeinheiten und Meßmethoden; Physikalische Maßbestimmungen und Meßinstrumente; Physikalische Übungen für Chemiker; Ausgewählte physikalische Aufgaben für Vorgeschrittene. — **Kalischer:** Die physikalischen Grundlagen der Elektrotechnik II; Grundzüge der Potentialtheorie und ihre Anwendung in der Elektrizitätslehre; Elektrische Schwingungen und drahtlose Telegraphie. — **Kassner:** Technische Meteorologie, mit Beispielen aus der Praxis. — **Kock:** Vorkurs zur Physik; Hochspannungserscheinungen und Messungen; Drahtlose Telegraphie und Hochfrequenztechnik. — **Krigar-Menzel:** Allgemeine Mechanik I: Gleichgewicht und Bewegung von Massenpunkten und starren Körpern; Theoretische Akustik. — **Luyken:** Der Erdmagnetismus und seine Anwendung in Technik und Bergbau. — **Möller:** Schwingungsprobleme unter besonderer Berücksichtigung der Fernsprechtechnik und drahtlosen Telegraphie. — **Pirani:** Einführung in die theoretische Behandlung chemischer und physikalischer Probleme mit besonderer Berücksichtigung graphischer Verfahren I und II. — **Weidert:** Die optischen Instrumente und deren theoretische Grundlagen. —

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der a. o. Professor der Chemie an der Universität Hamburg Dr. Fritz Paneth in gleicher Eigenschaft an der Universität Berlin, der a. o. Professor der theoretischen Physik an der Universität Frankfurt Dr. Otto Stern in gleicher Eigenschaft an der Universität Rostock, der a. o. Professor an der Universität Heidelberg Dr. Friedrich Pfeiffer zum ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Stuttgart, der Privatdozent für Mathematik und Mechanik an der Technischen Hochschule in Karlsruhe Dr. Heinrich Brandt zum ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Aachen.

Verliehen: Der Titel außerordentlicher Professor dem Privatdozenten Dr. Andor Fodor (Physiologische Chemie, Universität Halle), Dr. Erwin Ott (Chemie, Universität Münster), Dr. Rudolf Vogel (Chemie, Universität Göttingen).

Nobelpreise: Für Chemie 1920: dem ord. Professor der physikalischen Chemie an der Universität Berlin Geh. Regierungsrat Dr. Walter Nernst.

Angebote.

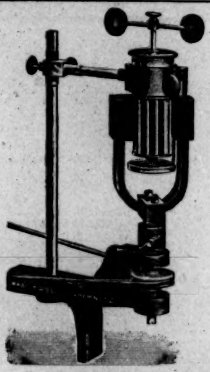
Assistent

gesucht, selbständig in Experiment und Rechnung, entweder gut elektrotechnisch oder in Röntgenphysik speziell ausgebildet. Gehalt entsprechend Vorbildung und Leistung. Angebote mit ausführlichen Angaben, besonders auch hinsichtlich der bisherigen Arbeiten, an den Direktor des Instituts für medizinische Physik an der Universität in Frankfurt a. M. Süd, **Theodor Sternhaus,** Weigertstr. 3.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Erich Hückel in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig

Max Kohl A.G. Chemnitz

Volleingezahltes Kapital Mk. 2400000.



52068. Modell eines Kurzschlussankers nach Friedr. C. G. Müller, für die Schwungmaschine.

Physikalische Apparate

Funken-Induktoren

Ölluftpumpen

Experimentier-Schalttafeln

Projektions-Apparate

Laboratorienmöbel

in gediegener Ausführung.

Weltausstellung Brüssel 1910: 4 Grosse Preise; Turin 1911: 2 Grosse Preise; Dresden 1911: Grosser Preis.

Optische Anstalt

C. P. Goerz A.-G.

Abt. Scheinwerferbau

Leutzsch bei Leipzig

Projektionsapparate

Ablesefernrohre
mit
Autokollimation

Goerz-Bogenlampen
mit **erhöhter** Helligkeit für Projektion, Kinematographie, Mikroskopie, Reproduktions- und Aufnahme-Ateliers, Therapie usw.

Inhaltsverzeichnis:

(B. — Besprechungen.)

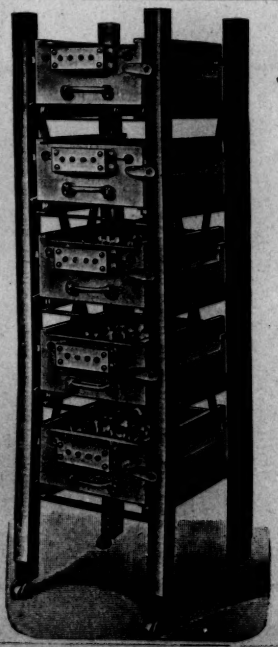
Seite

Abegg, R.†, u. **F. Auerbach**, Handbuch der anorganischen Chemie IV, 1, 2. (B.) 663
Alberti, E., u. **G. Zickner**, Kurvenform und Phase der Schwingungen in Röhrensendern 652
Bravaissche Regel: Über die Molekülabscheidung an Kristallen und die —, v. M. Volmer 646
Brillenproblem: Zur mathematischen Analyse des —, v. E. Weiß 659
Chemie: Handbuch der anorganischen — IV, 1, 2, v. R. Abegg† u. F. Auerbach. (B.) 663
Chemie: Grundriß der allgemeinen —, v. W. Ostwald. (B.) 664
Co- und Co_2-Molekül: Die elektrischen Momente des —, v. H. Weigt 643
Dießelhorst, H., Einige Versuche aus der Mechanik 657
Erdinneres: Elektrodynamische Erforschung des — und Luftschiffahrt, v. H. Löwy 664
Ettisch, M. Polanyi u. **K. Weißenberg**, Röntgenographische Untersuchungen an Metallen 646
Flüssigkeiten: Das Temperaturabhängigkeitsgesetz der Viskosität von —, v. H. Vogel 645
Goos, F., Ein photometrisch registrierender Komparator 648
Keesom, W. H., Die van der Waalsschen Kohäsionskräfte. (Berichtigung.) 643
Kettenleiter: Ein mechanisches Modell des —, v. H. Wigge 653
Kohäsionskräfte: Die van der Waalsschen —. Berichtigung, v. W. H. Keesom 643
Kolorimetrische Untersuchungen. VIII, v. O. Meißner 641

Seite

Komparator: Ein photometrisch registrierender —, v. F. Goos 648
Kristalle: Über die Molekülabscheidung an — und die Bravaissche Regel, v. M. Volmer 646
— Die — als Vorbilder des feinbaulichen Wesens der Materie, v. F. Rinne. (B.) 664
Kunze, W., Das Richtungshören und einige technische Anwendungen 649
Löwy, H., Elektrodynamische Erforschung des Erdinnern und Luftschiffahrt 664
Luftschiffahrt: Elektrodynamische Erforschung des Erdinnern und —, v. H. Löwy 664
Materie: Die Kristalle als Vorbilder des feinbaulichen Wesens der —, v. F. Rinne. (B.) 664
Mechanik: Einige Versuche aus der —, v. H. Dießelhorst 657
Meißner, O., Kolorimetrische Untersuchungen. VIII.
Metalle: Röntgenographische Untersuchungen an —, M. Ettisch, M. Polanyi u. K. Weißenberg
Mikroskopie: Über Neuerungen in der —, v. H. Siedentopf 659
Molekülabscheidung: Über die — an Kristallen 646
Bravaissche Regel, v. M. Volmer 646
Ostwald, W., Grundriß der allgemeinen Chemie (B.) 664
Polanyi, M., M. Ettisch u. **K. Weißenberg**, Röntgenographische Untersuchungen an Metallen 646
Richtungshören: Das — und einige technische Anwendungen, v. W. Kunze 649

(Fortsetzung auf S. III.)



Hochspannungs-Batterien

Vorzüge:

Grösste Leistung bei kleinstem Raum
Beliebige Trennbarkeit
Leichte Beweglichkeit · Niedriger Preis

Phywe-Hochspannungsbatterien haben u. a. im Gebrauch:

Kaiser Wilhelm-Institut, Dahlem.
Institut für Experimentalphysik, Universität Göttingen.
Institut für theoret. Physik, Universität Göttingen.
Physik. Institut der Bergakademie Clausthal.
Röntgen-Institut, Technische Hochschule Stuttgart.
Physikalisches Institut, Universität Frankfurt.
Physikal.-Chem. Institut, Techn. Hochschule, Karlsruhe.
Physikalisches Institut, Techn. Hochschule Karlsruhe.
Physikalisches Institut, Universität Groningen.
Taylor-Museum, Universit. Leiden-Haarlem.

Physikalische Werkstätten Aktienges.
Göttingen 1.